HỘI TOÁN HỌC HÀ NỘI THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỤY SỞ GD & ĐT NINH BÌNH

CHỦ BIÊN
NGUYỄN VĂN MẬU, VŨ VĂN KIÊM

KỶ YẾU
HỘI THẢO KHOA HỌC

CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2012 - 2013

Ninh Bình, ngày 02 - 03 tháng 03 năm 2013

LỜI NÓI ĐẦU

Năm học 2012-013 là năm học thứ 54 của trường THPT chuyên Lương Văn Tụy. Trường được thành lập từ năm 1959 với tên gọi trường phổ thông cấp 3 Ninh Bình và là ngôi trường cấp 3 đầu tiên của tỉnh Ninh Bình. Với 54 năm xây dựng và phát triển, trường THPT chuyên Lương Văn Tụy đã trải qua ba giai đoạn: giai đoạn từ khi thành lập đến tháng 8 năm 1992 là trường THPT đại trà như các trường THPT khác trong tỉnh; giai đoạn từ tháng 9 năm 1992 đến tháng 5 năm 2001 là trường THPT có hệ chuyên và từ ngày 31 tháng 5 năm 2001 đến nay là trường THPT chuyên của tỉnh.

Với đóng góp suất sắc cho sự nghiệp giáo dục, nhà trường đã được tặng nhiều bằng khen cấp Tỉnh, Cấp Bộ, nhiều năm được tặng cờ đơn vị xuất sắc, lá cờ đầu của ngành giáo dục tỉnh Ninh Bình. Năm 1968 và 1978 được chính phủ tặng bằng khen. Hơn nữa, trường được nhà nước tặng 03 Huân chương Lao động: Hạng Ba-năm 1985, hạng Nhì năm 1989, hạng Nhất -năm 1995. Năm 1998 được Nhà nước tặng Huân chương Độc lập hạng Ba. Ngày 23 tháng 9 năm 2000 được Chủ tịch nước ký quyết định số 442 KT/CTN phong tặng danh hiệu đơn vị Anh hùng Lao động thời kỳ đổi mới.

Năm học 1992 - 1993 hệ chuyên nhà trường có 5 lớp chuyên: 2 lớp 11 chuyên Văn và chuyên Toán, 3 lớp 10 chuyên Văn, Toán và tiếng Pháp với tổng số học sinh chuyên là 108 em. Đến nay trường có 32 lớp chuyên với 1014 học sinh. Nhà trường được tỉnh xác định là trường trọng điểm chất lượng cao mang trọng trách và vinh dự lớn, là nơi đào tạo - bồi dưỡng học sinh giỏi, góp phần phát hiện, vun trồng những nhân tài cho quê hương, đất nước. Được sự quan tâm, tạo điều kiện về chế độ, chính sách, đội ngũ, cơ sở vật chất... của Tỉnh và ngành giáo dục; được sự động viên kịp thời, hiệu quả của phụ huynh học sinh và toàn xã hội đã tiếp thêm sức mạnh cho thầy và trò phát huy truyền thống dạy tốt, học tốt, đoàn kết, thống nhất, đưa chất lượng giáo dục ngày một nâng cao. Khắc phục mọi khó khăn khi cơ sở vật chất chưa đồng bộ, hiện đại, với sự đoàn kết, thống nhất cao, đội ngũ cán bộ, giáo viên nhà trường đều có tinh thần trách nhiệm cao "tất cả vì học sinh thân yêu". Không ngừng chú trọng vào hoạt động chuyên môn để nâng cao chất lượng các bài giảng, các tiết học; Trường đã tổ chức nhiều hội thảo chuyên đề cấp trường, tham gia hội nhập các hoạt động chuyên môn với các trường chuyên khu vực Duyên Hải Bắc bộ do Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức ; phong trào đúc rút sáng kiến kinh nghiệm được 100% giáo viên nhà trường hưởng ứng tham gia.

Trong 20 năm qua, hệ chuyên của trường đã góp phần làm dày lên bảng thành tích tại các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, quốc tế của nhà trường với 792 giải học sinh giỏi quốc gia. Trong đó có 23 giải Nhất, 158 giải Nhì, 342 giải Ba và 269 giải Khuyến khích. Đặc biệt, năm học 2011- 2012 trường đạt thành tích xuất sắc từ kỳ thi học sinh giỏi quốc gia với 52/64 học sinh đạt giải, chiếm tỷ lệ 82,25, trong đó môn toán có 6 em dự thi đạt 6 giải Ba, là năm học có tỷ lệ học sinh đoạt giải cao nhất trong 20 năm dự thi học sinh giỏi quốc gia của nhà trường. Năm học 2012-2013 trường có 67 em dự đạt 50 giải (2 nhất, 8 nhì, 22 Ba, 18 KK) tỷ lệ đạt giải 75.

Trong các kỳ thi Olympic quốc tế nhà trường có 6 lượt học sinh tham gia dự thi và đạt thành tích hết sức tự hào với 4 huy chương (1 HC Bạc môn Sinh học, 3 HC đồng ở các môn Sinh học, Hóa học, Tin học), 1 bằng khen quốc tế môn Hóa học. Trong kỳ thi tuyển sinh vào các trường Đại học trường luôn đứng trong tốp 50 trường có điểm thi bình quân cao nhất toàn quốc.

Về môn Toán, trường đã có 64 giải Quốc gia với 8 Nhì, 31 giải Ba, 25 giải KK, môn Tin học đạt 112 giải với 8 giải Nhất, 44 giải Nhì, 39 giải Ba, 21 giải KK; Thành tích HSG môn toán còn khiêm tốn, chưa có giải Nhất và giải Quốc tế vì vậy nhà trường đang phấn đấu để thúc đẩy phong trào dạy - học Toán, bồi dưỡng HSG, nghiên cứu Toán học để trong tương lai không xa có được thành tích tốt hơn nữa về môn Toán trong các kỳ thi HSG quốc gia, quốc tế.

Thực hiện chỉ đạo của Sở Giáo dục và Đào tạo và được sự quan tâm giúp đỡ của Nhà giáo Nhân dân, Giáo sư Tiến sỹ Khoa học Nguyễn Văn Mậu cùng các nhà khoa học trong Hội Toán học Hà Nội và sự giúp đỡ của các đồng nghiệp trong và ngoài nhà trường, Ban tổ chức đã hoàn thành cuốn kỷ yếu của Hội thảo khoa học Các chuyên đề toán bồi dưỡng học sinh giỏi năm học 2012-2013. Với việc Dạy và Học môn Toán học, đây là lần đầu tiên tỉnh Ninh Bình có được hội thảo quy mô lớn với sự tham gia của nhiều nhà khoa học đầu ngành.

Thay mặt Ban giám hiệu, chúng tôi xin chân thành cảm ơn NGND GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu và mong muốn có được sự hợp tác bền chặt giữa hội toán học Hà Nội với Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Ninh Bình với Nhà trường, để các giáo viên có cơ hội trau dồi kiến thức, phương pháp bồi dưỡng học sinh giỏi bộ môn, đóng góp tích cực cho sự nghiệp giáo dục nói chung và sự phát triển toán học nói riêng.

Thay mặt Đảng ủy, BGH và toàn thể các thầy cô giáo, cán bộ, nhân viên và các em học sinh nhà trường kính chúc các quý vị đại biểu khách quý một năm mới An khang Thịnh vượng, dồi dào sức khỏe, hạnh phúc và thành công.

Trân trọng cảm ơn!

NGUT: Phạm Văn Đằng

Bí thư Đảng bộ, Hiệu trưởng nhà trường

CHƯƠNG TRÌNH HỘI THẢO KHOA HỌC
"CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2012-2013"

Hòa nhịp với cả nước chào đón Năm mới, mừng Đảng mừng Xuân Quý Tỵ và thực hiện các chương trình đổi mới giáo dục, Sở Giáo Dục và Đào tạo Ninh Bình, Trường THPT Chuyên Lương Văn Tuy phối hợp với Hội Toán học Hà Nội đồng tổ chức Hội thảo khoa học: *Các chuyên đề Toán học bồi dưỡng học sinh giỏi năm học 2012-2013.*

I. Thời gian, địa điểm, thành phần

1. Khai mạc vào 8h30 ngày 02/03/2013.

2. Tại Khách sạn Hoàng Sơn Peace, đường Trịnh Tú, phường Ninh Khánh, TP Ninh Bình.

3. Đại biểu mời:

- Lãnh đạo Bộ GD và ĐT, các Sở Giáo dục và Đào tạo, Liên Hiệp Các Hội KH và KT Hà Nội, Hội Toán học Hà Nội, Hội THVN, Hội Toán Ứng Dụng VN, Hội Giảng dạy Toán học VN.
- Lãnh đạo UBND Tỉnh, Sở GDĐT, Chuyên viên Phòng GDTrH, Khảo thí, các phòng GDĐT huyện, thành phố, thị xã,
- Các giáo viên dạy bộ môn Toán các trường THPT thuộc tỉnh Ninh Bình, các Thạc sỹ toán công tác tại Tỉnh NB.
- Toàn thể thành viên Semina Giải tích - Đại số, Semina Toán Olympic, các tác giả có bài đăng ký tham dự Hội thảo; quý đại biểu đã đăng ký trên trang WEB của hoi THHN.

II. Chương trình chi tiết

Ngày 02.03.2013: (Thứ Bảy)
08h00-8h15 Đón tiếp đại biểu
8h15- 8h45: Chương trình văn nghệ chào mừng
08h45-9h15 Điều hành: *ThS Phạm Văn Khanh, PHT Trường THPT Chuyên Lương Văn Tuy (Tuyên bố lý do, giới thiệu đại biểu)*

Phát biểu: *ThS Vũ Văn Kiểm, Giám đốc Sở GD& ĐT Ninh Bình (khai mạc), GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu, CT Hội THHN (đề dẫn), đại biểu cấp trên phát biểu.*

- 09h15-10h15: Phiên toàn thể
Điều hành: *PGS.TS. Trần Huy Hổ, TS. Đinh Sỹ Đại*

1. PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ, *Về một vài dãy truy hồi*
2. PGS.TS. Nguyễn Minh Tuấn, *Bất đẳng thức xoay vòng Shapiro*

hay
$$f(x)+f(y)=f(x+y)+f(0),\forall x,y\in[0;\pi],x+y<\pi. \tag{2}$$
Đặt $f(x)=f(0)+g(x)$. Khi đó $g(x)$ liên tục trong đoạn $[0;\pi]$ và (2) có dạng
$$f(0)+g(x)+f(0)+g(y)=f(0)+g(x+y)+f(0),\forall x,y\in[0;\pi],x+y<\pi$$
$$\Leftrightarrow g(x)+g(y)=g(x+y),\forall x,y\in[0;\pi],x+y<\pi. \tag{3}$$
Do $g(x)$ liên tục trong đoạn $[0;\pi]$ nên (3) là phương trình hàm Cauchy, một dạng phương trình hàm cơ bản, có nghiệm $g(x)=\alpha x$. Suy ra $f(x)=f(0)+\alpha x$.

Đặt $f(0)=\beta$, ta được $f(x)=\alpha x+\beta$.

Ta cần xác định α,β để $f(x)>0,\ \forall x\in(0;\pi)$, $x+y<\pi$ và $f(A)+f(B)+f(C)=\pi$ hay
$$\begin{cases}\alpha x+\beta>0,\forall x\in(0;\pi);\\ \alpha A+\beta+\alpha B+\beta+\alpha C+\beta=\pi.\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha x+\beta>0,\forall x\in(0;\pi);\\ \alpha(A+B+C)+3\beta=\pi.\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha x+\beta>0,\forall x\in(0;\pi);\\ \alpha\pi+3\beta=\pi.\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha x+\beta>0,\forall x\in(0;\pi);\\ \beta=\dfrac{(1-\alpha)\pi}{3}.\end{cases}$$
Do đó
$$f(x)=\alpha x+\frac{(1-\alpha)\pi}{3},\forall x\in(0;\pi). \tag{4}$$
Cho $x\to 0^+$, từ (4), suy ra
$$\frac{(1-\alpha)\pi}{3}\geq 0\Leftrightarrow\alpha\leq 1.$$
Cho $x\to\pi^-$, từ (4), suy ra
$$\alpha\pi+\frac{(1-\alpha)\pi}{3}\geq 0$$
hay $\alpha\geq-\dfrac{1}{2}$. Vậy $-\dfrac{1}{2}\leq\alpha\leq 1$.

Với $-\dfrac{1}{2}<\alpha<1$, thì $f(x)$ xác định bởi (4) hiển nhiên thỏa mãn bài toán.

Xét $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ thì $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Thật vậy, với $0<x<\pi$ thì $f(x)>f(\pi)=0$. Suy ra $f(x)>0,\ \forall x\in(0;\pi)$.

Xét $\alpha=1$ thì $f(x)=x$ hiển nhiên thỏa mãn điều kiện bài ra. Vậy các hàm số cần tìm đều có dạng
$$f(x)=\alpha x+\frac{(1-\alpha)\pi}{3},\quad -\frac{1}{2}\leq\alpha\leq 1.$$

Như vậy, lời giải trên đây đã vét hết tất cả các nghiệm, là các hàm số $f(x)$, thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Bây giờ, ta tiếp tục tìm kiếm những áp dụng cụ thể của bài toán trên và xét những trường hợp khác mà bài toán chưa đề cập.

Từ Bài toán 1.1, ta có

Mệnh đề 1.1. *Với $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = \alpha A + \frac{(1-\alpha)\pi}{3}, \quad B_1 = \alpha B + \frac{(1-\alpha)\pi}{3}, \quad C_1 = \alpha C + \frac{(1-\alpha)\pi}{3},$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Mệnh đề 1.2. *Với $\alpha < -\frac{1}{2}$, nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn $\max\{A, B, C\} < \frac{(\alpha-1)\pi}{3\alpha}$, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = \alpha A + \frac{(1-\alpha)\pi}{3}, \quad B_1 = \alpha B + \frac{(1-\alpha)\pi}{3}, \quad C_1 = \alpha C + \frac{(1-\alpha)\pi}{3},$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Chứng minh. Thật vậy, với $\alpha < -\frac{1}{2}$, ta có

$$\max\{A, B, C\} < \frac{(\alpha-1)\pi}{3\alpha} \Rightarrow A < \frac{(\alpha-1)\pi}{3\alpha}$$

$$\Rightarrow 3\alpha A + (1-\alpha)\pi > 0 \Rightarrow \alpha A + \frac{(1-\alpha)\pi}{3} > 0 \Rightarrow A_1 > 0.$$

Tương tự $B_1 > 0$ và $C_1 > 0$. Hơn nữa, $A_1 + B_1 + C_1 = \pi$, nên ta có điều phải chứng minh.

Mệnh đề 1.3. *Với $\alpha > 1$, nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn $\min\{A, B, C\} > \frac{(\alpha-1)\pi}{3\alpha}$, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = \alpha A + \frac{(1-\alpha)\pi}{3}, \quad B_1 = \alpha B + \frac{(1-\alpha)\pi}{3}, \quad C_1 = \alpha C + \frac{(1-\alpha)\pi}{3},$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Chứng minh. Thật vậy, với $\alpha > 1$, ta có

$$\min\{A, B, C\} > \frac{(\alpha-1)\pi}{3\alpha} \Rightarrow A > \frac{(\alpha-1)\pi}{3\alpha}$$

$$\Rightarrow 3\alpha A + (1-\alpha)\pi > 0 \Rightarrow \alpha A + \frac{(1-\alpha)\pi}{3} > 0 \Rightarrow A_1 > 0.$$

Tương tự $B_1 > 0$ và $C_1 > 0$. Hơn nữa, $A_1 + B_1 + C_1 = \pi$, nên ta có điều phải chứng minh.

Dưới đây là một số trường hợp riêng, minh họa cho các mệnh đề trên.

- Từ Mệnh đề 1.1, với $\alpha = -\frac{1}{2}$, ta có

Hệ quả 1.1. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = \frac{\pi - A}{2},\quad B_1 = \frac{\pi - B}{2},\quad C_1 = \frac{\pi - C}{2}$$

hay

$$A_1 = \frac{B + C}{2},\quad B_1 = \frac{C + A}{2},\quad C_1 = \frac{A + B}{2}$$

cũng là ba góc của một tam giác.

- Từ Mệnh đề 1.1, với $\alpha = \frac{1}{2}$, ta có

Hệ quả 1.2. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = \frac{\pi + 3A}{6},\quad B_1 = \frac{\pi + 3B}{6},\quad C_1 = \frac{\pi + 3C}{6}$$

hay

$$A_1 = \frac{4A + B + C}{6},\quad B_1 = \frac{4B + C + A}{6},\quad C_1 = \frac{4C + A + B}{6}$$

cũng là ba góc của một tam giác.

- Từ Mệnh đề 1.2, với $\alpha = -\frac{2}{3}$, ta có

Hệ quả 1.3. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn* $\max\{A, B, C\} < \frac{5\pi}{6}$, *thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = \frac{5\pi - 6A}{9},\quad B_1 = \frac{5\pi - 6B}{9},\quad C_1 = \frac{5\pi - 6C}{9}$$

hay

$$A_1 = \frac{5B + 5C - A}{9},\quad B_1 = \frac{5C + 5A - B}{9},\quad C_1 = \frac{5A + 5B - C}{9}$$

cũng là ba góc của một tam giác.

- Từ Mệnh đề 1.2, với $\alpha = -\frac{4}{5}$, ta có

Hệ quả 1.4. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn* $\max\{A, B, C\} < \frac{3\pi}{4}$, *thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = \frac{3\pi - 4A}{5}, \ B_1 = \frac{3\pi - 4B}{5}, \ C_1 = \frac{3\pi - 4C}{5}$$

hay

$$A_1 = \frac{3B + 3C - A}{5}, \ B_1 = \frac{3C + 3A - B}{5}, \ C_1 = \frac{3A + 3B - C}{5}$$

cũng là ba góc của một tam giác.

- Từ Mệnh đề 1.2, với $\alpha = -1$, ta có

Hệ quả 1.5. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn* $\max\{A, B, C\} < \frac{2\pi}{3}$, *thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = \frac{2\pi}{3} - A, \ B_1 = \frac{2\pi}{3} - B, \ C_1 = \frac{2\pi}{3} - C$$

hay

$$A_1 = \frac{2B + 2C - A}{3}, \ B_1 = \frac{2C + 2A - B}{3}, \ C_1 = \frac{2A + 2B - C}{3}$$

cũng là ba góc của một tam giác.

- Từ Mệnh đề 1.2, với $\alpha = -2$, ta có

Hệ quả 1.6. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn* $\max\{A, B, C\} < \frac{\pi}{2}$, *tức là tam giác ABC nhọn, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = \pi - 2A, \ B_1 = \pi - 2B, \ C_1 = \pi - 2C$$

hay

$$A_1 = B + C - A, \ B_1 = C + A - B, \ C_1 = A + B - C$$

cũng là ba góc của một tam giác.

- Từ Mệnh đề 1.3, với $\alpha = 2$, ta có

Hệ quả 1.7. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn* $\min\{A, B, C\} > \frac{\pi}{6}$, *thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = 2A - \frac{\pi}{3}, \ B_1 = 2B - \frac{\pi}{3}, \ C_1 = 2C - \frac{\pi}{3}$$

hay

$$A_1 = \frac{5A - B - C}{3}, \ B_1 = \frac{5B - C - A}{3}, \ C_1 = \frac{5C - A - B}{3}$$

cũng là ba góc của một tam giác.

- Từ Mệnh đề 1.3, với $\alpha = 4$, ta có

Hệ quả 1.8. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn* $\min\{A, B, C\} > \dfrac{\pi}{4}$, *thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = 4A - \pi, \quad B_1 = 4B - \pi, \quad C_1 = 4C - \pi$$

hay

$$A_1 = 3A - B - C, \quad B_1 = 3B - C - A, \quad C_1 = 3C - A - B$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Bây giờ, nhận xét rằng, với $-\dfrac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, ta có

$$\begin{aligned} A_1 = \alpha A + \frac{(1-\alpha)\pi}{3} &= \alpha A + \frac{(1-\alpha)(A+B+C)}{3} \\ &= \frac{(1+2\alpha)}{3}A + \frac{(1-\alpha)}{3}B + \frac{(1-\alpha)}{3}C. \end{aligned}$$

Tương tự như biểu diễn trên đối với B_1 và C_1.

Đặt $\alpha_1 = \dfrac{1+2\alpha}{3}$, $\beta_1 = \gamma_1 = \dfrac{1-\alpha}{3}$. Thế thì $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \geq 0$ và $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1$. Khi đó

$$A_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C, \quad B_1 = \alpha_1 B + \beta_1 C + \gamma_1 A, \quad C_1 = \alpha_1 C + \beta_1 A + \gamma_1 B$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Nhận xét trên gợi ý cho ta kết quả sau

Mệnh đề 1.4. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$\begin{cases} A_1 = \alpha A + \beta B + \gamma C; \\ B_1 = \alpha B + \beta C + \gamma A; \\ C_1 = \alpha C + \beta A + \gamma B, \end{cases} \tag{5}$$

trong đó $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ và $\alpha + \beta + \gamma = 1$, cũng là ba góc của một tam giác.

Chứng minh. Dễ dàng kiểm tra được rằng $A_1, B_1, C_1 > 0$ và $A_1 + B_1 + C_1 = (\alpha + \beta + \gamma)(A + B + C) = 1.\pi = \pi$.

Bây giờ, giả sử ngược lại, A_1, B_1, C_1 là ba góc của một tam giác cho trước. Ta cần xác định các góc A, B, C của tam giác ABC thỏa mãn hệ phương trình (5) nêu trên.

Giải hệ phương trình tuyến tính này (có thể bằng phương pháp sử dụng định thức), ta được

$$A = \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma)A_1 + (\gamma^2 - \alpha\beta)B_1 + (\beta^2 - \gamma\alpha)C_1}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma};$$

$$B = \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma) B_1 + (\gamma^2 - \alpha\beta) C_1 + (\beta^2 - \gamma\alpha) A_1}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma};$$
$$C = \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma) C_1 + (\gamma^2 - \alpha\beta) A_1 + (\beta^2 - \gamma\alpha) B_1}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma},$$

với điều kiện phát sinh là α, β, γ không đồng thời bằng nhau (bằng $\frac{1}{3}$).

Để thống nhất trong việc trình bày nội dung các mệnh đề, ta thay đổi kí hiệu các góc của hai tam giác cho nhau và thu được kết quả sau

Mệnh đề 1.5. *Cho các số α, β, $\gamma \geq 0$, không đồng thời bằng nhau (bằng $\frac{1}{3}$) và $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$\begin{cases} A_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C; \\ B_1 = \alpha_1 B + \beta_1 C + \gamma_1 A; \\ C_1 = \alpha_1 C + \beta_1 A + \gamma_1 B, \end{cases} \tag{6}$$

trong đó

$$\alpha_1 = \frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma};$$
$$\beta_1 = \frac{\gamma^2 - \alpha\beta}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma};$$
$$\gamma_1 = \frac{\beta^2 - \gamma\alpha}{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma},$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Chẳng hạn, các số α, β, γ sau đây thỏa mãn Mệnh đề 1.5

$$\alpha = \sin^2\varphi, \quad \beta = \cos^2\varphi, \quad \gamma = 0.$$

Do đó, nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau

$$A_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C;$$
$$B_1 = \alpha_1 B + \beta_1 C + \gamma_1 A;$$
$$C_1 = \alpha_1 C + \beta_1 A + \gamma_1 B,$$

trong đó

$$\alpha_1 = \frac{\sin^4\varphi}{\sin^6\varphi + \cos^6\varphi};$$
$$\beta_1 = \frac{-\sin^2\varphi.\cos^2\varphi}{\sin^6\varphi + \cos^6\varphi};$$
$$\gamma_1 = \frac{\cos^4\varphi}{\sin^6\varphi + \cos^6\varphi},$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Bây giờ, ta tiếp tục các hướng khai thác khác để các kết quả tìm được phong phú hơn.

Nhận xét rằng, trong các kết quả ở các phần trên đây, cách thiết lập các góc A_1, B_1, C_1 từ các góc A, B, C có tính hoán vị vòng quanh. Do đó, vai trò của các góc A_1, B_1, C_1 là như nhau. Trong phần tiếp theo, ta sẽ thiết lập các góc của một tam giác mà vai trò của chúng không như nhau, vì tính hoán vị vòng quanh không thực hiện được.

Chẳng hạn, từ Mệnh đề 1.1 ta thấy rằng, với α là số thực bất kì, nếu đặt

$$A_2 = \alpha A, \quad B_2 = \alpha B, \quad C_2 = \alpha C + (1-\alpha)\pi,$$

thì $A_2 + B_2 + C_2 = \pi$. Do đó, nếu $A_2 > 0$, $B_2 > 0$, $C_2 > 0$ thì A_2, B_2, C_2 là ba góc của một tam giác. Ta có các kết quả sau

Mệnh đề 1.6. *Với $0 < \alpha \leq 1$, nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_2, B_2, C_2 xác định như sau*

$$A_2 = \alpha A, \quad B_2 = \alpha B, \quad C_2 = \alpha C + (1-\alpha)\pi,$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Chứng minh. Rõ ràng $A_2 > 0$, $B_2 > 0$, $C_2 > 0$. Suy ra điều phải chứng minh.

- Từ Mệnh đề 1.6, với $\alpha = \dfrac{1}{2}$, ta có

Hệ quả 1.10. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_2, B_2, C_2 xác định như sau*

$$A_2 = \frac{A}{2}, \quad B_2 = \frac{B}{2}, \quad C_2 = \frac{\pi + C}{2}$$

cũng là ba góc của một tam giác, trong đó C_2 là góc tù.

Mệnh đề 1.7. *Với $0 < \alpha \leq 2$, nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, trong đó C là góc tù, thì A_2, B_2, C_2 xác định như sau*

$$A_2 = \alpha A, \quad B_2 = \alpha B, \quad C_2 = \alpha C + (1-\alpha)\pi,$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Chứng minh. Rõ ràng $A_2 > 0$, $B_2 > 0$. Ngoài ta, ta có

$$C > \frac{\pi}{2} \Rightarrow C_2 = \alpha C + (1-\alpha)\pi > \alpha\frac{\pi}{2} + (1-\alpha)\pi = \frac{(2-\alpha)\pi}{2} \geq 0 \Rightarrow C_2 > 0.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

- Từ Mệnh đề 1.7, với $\alpha = 2$, ta có

Hệ quả 1.11. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, trong đó C là góc tù, thì A_2, B_2, C_2 xác định như sau*

$$A_2 = 2A, \quad B_2 = 2B, \quad C_2 = 2\pi - C$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Mệnh đề 1.8. *Với $-\frac{1}{2} \le \alpha < 0$, nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_3, B_3, C_3 xác định như sau*

$$A_3 = \alpha A + m\pi, \quad B_3 = \alpha B + n\pi, \quad C_3 = \alpha C + p\pi,$$

trong đó

$$m \ge -\alpha, \quad n \ge -\alpha, \quad p \ge -\alpha, \quad m + n + p = 1 - \alpha,$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Chứng minh. Ta có

$$A_3 + B_3 + C_3 = \alpha\,(A + B + C) + (m + n + p)\,\pi = \alpha\pi + (1 - \alpha)\,\pi = \pi.$$

Ngoài ra, ta có

$$A < \pi \Rightarrow -\alpha A < -\alpha\pi \Rightarrow -\alpha > \frac{-\alpha A}{\pi}.$$

Theo giả thiết, ta có $m \ge -\alpha$. Do đó

$$m > \frac{-\alpha A}{\pi} \Rightarrow \alpha A + m\pi > 0 \Rightarrow A_3 > 0.$$

Tương tự, ta có $B_3 > 0$ và $C_3 > 0$.
Cuối cùng, vì $m \ge -\alpha$, $n \ge -\alpha$, $p \ge -\alpha$, nên $1 - \alpha = m + n + p \ge -3\alpha$.
Như vậy, giả thiết $\alpha \ge -\frac{1}{2}$ sẽ đảm bảo được rằng $1 - \alpha \ge -3\alpha$.
Ta có điều phải chứng minh.

- Từ Mệnh đề 1.8, với $\alpha = -\frac{1}{4}$, $m = \frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{3}{4}$, ta có

Hệ quả 1.12. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_3, B_3, C_3 xác định như sau*

$$A_3 = -\frac{A}{4} + \frac{\pi}{4}, \quad B_3 = -\frac{B}{4} + \frac{\pi}{4}, \quad C_3 = -\frac{C}{4} + \frac{3\pi}{4},$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Tiếp theo, dễ dàng chứng minh được các kết quả sau đây

Mệnh đề 1.9. *Nếu tam giác ABC có ba góc nhọn (hoặc vuông tại C), thì A_3, B_3, C_3 xác định như sau*

$$A_3 = \frac{\pi}{2} - A, \quad B_3 = \frac{\pi}{2} - B, \quad C_3 = \pi - C,$$

cũng là ba góc của một tam giác tù (hoặc vuông tại C_3).

Mệnh đề 1.10. *Nếu tam giác ABC có góc C tù (hoặc vuông), thì A_3, B_3, C_3 xác định như sau*

$$A_3 = \frac{\pi}{2} - A, \quad B_3 = \frac{\pi}{2} - B, \quad C_3 = \pi - C,$$

cũng là ba góc của một tam giác nhọn (hoặc vuông tại C_3).

1.2 Áp dụng

Từ những kết quả ở phần 1.1 ta thấy rằng, với ba góc của một tam giác cho trước, có thể tạo ra được ba góc của một tam giác mới và do đó có thể suy ra được nhiều hệ thức lượng giác liên quan đến các góc của tam giác đó. Hơn nữa, bằng cách phối hợp những phương pháp khác nhau, ta còn có thể tạo ra được nhiều đẳng thức và bất đẳng thức lượng giác khác, vô cùng phong phú.

Sau đây là một vài ví dụ.

Giả sử rằng, ta đã chứng minh được các hệ thức sau đây và xem chúng là những hệ thức "gốc" ban đầu

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \tag{7}$$

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8} \tag{8}$$

$$0 < \sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}, \tag{9}$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C. \tag{10}$$

Áp dụng Hệ quả 1.1 vào (7), ta có

$$\sin\left(\frac{\pi - A}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi - B}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi - C}{2}\right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Như vậy, ta đã tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 1.1. $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

Áp dụng Hệ quả 1.1 vào (8), ta có

$$\cos\left(\frac{\pi - A}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi - B}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi - C}{2}\right) \leq \frac{1}{8}.$$

Như vậy, ta đã tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 1.2. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$.

Áp dụng Hệ quả 1.1 vào (10), ta có

$$\sin 2\left(\frac{\pi - A}{2}\right) + \sin 2\left(\frac{\pi - B}{2}\right) + \sin 2\left(\frac{\pi - C}{2}\right) = 4\sin\frac{\pi - A}{2}\sin\frac{\pi - B}{2}\sin\frac{\pi - C}{2}.$$

hay

$$\sin(\pi - A) + \sin(\pi - B) + \sin(\pi - C) = 4\sin\frac{\pi - A}{2}\sin\frac{\pi - B}{2}\sin\frac{\pi - C}{2}.$$

Như vậy, ta đã tạo được đẳng thức sau

Đẳng thức 1.1. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

Bây giờ, để sáng tác thêm những hệ thức đa dạng hơn, ta tiếp tục khai thác những kết quả trên, chẳng hạn từ Bất đẳng thức 1.2 ta có

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le 1 \Leftrightarrow 32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\left(2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right) \le 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin A\sin B\sin C \le 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \qquad (11)$$

Như vậy, ta đã tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 1.3. $\sin A\sin B\sin C \le \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

Bởi (10) và Đẳng thức 1.1, từ (11), ta có bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 1.4. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \le \sin A + \sin B + \sin C$.

Ta tiếp tục khai thác Bất đẳng thức 1.4. Nhận xét rằng, nếu tam giác ABC là tam giác nhọn thì, áp dụng Hệ quả 1.6 vào Bất đẳng thức 1.4, ta có

$$\sin 2(\pi - 2A) + \sin 2(\pi - 2B) + \sin 2(\pi - 2C)$$

$$\le \sin(\pi - 2A) + \sin(\pi - 2B) + \sin(\pi - 2C)$$

$$\Leftrightarrow -\sin 4A - \sin 4B - \sin 4C \le \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C.$$

Như vậy, ta tiếp tục tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 1.5. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C + \sin 4A + \sin 4B + \sin 4C \geq 0.$

Bây giờ, áp dụng Hệ quả 1.10 vào Bất đẳng thức 1.4, ta có

$$\sin\left(2.\frac{A}{2}\right) + \sin\left(2.\frac{B}{2}\right) + \sin\left(2.\frac{\pi + C}{2}\right) \leq \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{\pi + C}{2}.$$

Ta tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 1.6. $\sin A + \sin B - \sin C \leq \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}.$

Bây giờ, giả sử tam giác ABC có góc C tù. Áp dụng Hệ quả 1.11 vào Bất đẳng thức 1.1, ta có

$$\cos\frac{2A}{2} + \cos\frac{2B}{2} + \cos\frac{2C - \pi}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ta tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 1.7. $\cos A + \cos B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \left(C > \frac{\pi}{2}\right).$

Tiếp theo, giả sử tam giác ABC nhọn (hoặc vuông tại C). Áp dụng Mệnh đề 1.9 vào (9), ta có

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)\sin(\pi - C) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Ta được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 1.8. $0 < \cos A \cos B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \left(C \leq \frac{\pi}{2}\right).$

Bây giờ, giả sử tam giác ABC có góc C tù (hoặc vuông). Áp dụng Mệnh đề 1.10 vào (7), ta có

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) + \sin(\pi - C) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ta được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 1.9. $0 < \cos A + \cos B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \left(C \geq \frac{\pi}{2}\right).$

2 Phép chuyển đổi bảo toàn cạnh của tam giác

2.1 Phép chuyển đổi

Hai bài toán sau cũng đã được tài liệu [1] đề cập

Bài toán 2.1. *Xác định các cặp số α, β để hàm số $f(x) = \alpha x + \beta$ có tính chất là $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ luôn lập thành độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.*

Giải. Để $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, trước hết ta phải có

$$f(a) > 0, f(b) > 0, f(c) > 0, \quad \forall \Delta ABC.$$

Suy ra

$$\alpha a + \beta > 0, \alpha b + \beta > 0, \alpha c + \beta > 0, \quad \forall \Delta ABC. \tag{12}$$

Do đó $\alpha \geq 0$. Thật vậy, nếu $\alpha < 0$, β tùy ý thì ta chọn tam giác ABC có a đủ lớn. Khi đó, theo tính chất của nhị thức bậc nhất, ta cũng sẽ nhận được $\alpha a + \beta < 0$.

Trường hợp khi đồng thời xảy ra $\alpha = 0$, $\beta = 0$ thì $f(x) \equiv 0$ không thỏa mãn bài toán.

Ngược lại, với $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$ thì ta thấy $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, do a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC. Thật vậy, ta có

$$f(a) + f(b) > f(c), \quad f(b) + f(c) > f(a), \quad f(c) + f(a) > f(b),$$

tức là

$$\begin{cases} \alpha a + \beta + \alpha b + \beta > \alpha c + \beta \\ \alpha b + \beta + \alpha c + \beta > \alpha a + \beta \\ \alpha c + \beta + \alpha a + \beta > \alpha b + \beta \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \alpha(a+b) + \beta > \alpha c \\ \alpha(b+c) + \beta > \alpha a \\ \alpha(c+a) + \beta > \alpha b. \end{cases}$$

Điều này hiển nhiên vì $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$.

Vậy với $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$ thì hàm số $f(x) = \alpha x + \beta$ có tính chất là $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ luôn lập thành độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Bài toán 2.2. *Xác định các cặp số α, β để hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\alpha x + \beta}$ có tính chất là $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ luôn lập thành độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước.*

Giải. Không mất tính tổng quát, ta luôn giả thiết $a \geq b \geq c$.

Nhận xét rằng, hàm số $g(x) = \dfrac{1}{x}$ (phép nghịch đảo) không có tính chất $g(a)$, $g(b)$, $g(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác ứng với mọi tam giác ABC cho trước. Thật vậy, xét tam giác cân ABC có $a = b = 2$, $c = 1$, thì ta có $g(a) = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2}$, $g(b) = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}$, $g(c) = \dfrac{1}{c} = 1$.

Khi đó
$$g(a)+g(b)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=g(c).$$

Để $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác cho trước, trước hết ta phải có
$$f(a)>0, f(b)>0, f(c)>0,\ \ \forall\Delta ABC.$$

Suy ra
$$\frac{1}{\alpha a+\beta}>0, \frac{1}{\alpha b+\beta}>0, \frac{1}{\alpha c+\beta}>0,\ \ \forall\Delta ABC$$

hay
$$\alpha a+\beta>0, \alpha b+\beta>0, \alpha c+\beta>0,\ \ \forall\Delta ABC. \tag{13}$$

Từ (13), ta thu được $\alpha\geq 0$. Thật vậy, nếu $\alpha<0$, β tùy ý cho trước, thì ta chọn tam giác ABC có a đủ lớn. Khi đó, theo tính chất của nhị thức bậc nhất, ta sẽ nhận được $\alpha a+\beta<0$.

Tương tự, cũng từ (13) suy ra $\beta\geq 0$. Thật vậy, nếu $\beta<0$ thì ta chọn tam giác ABC có a đủ nhỏ. Khi đó, theo tính chất của nhị thức bậc nhất, ta cũng sẽ nhận được $\alpha a+\beta<0$.

Trường hợp khi đồng thời xảy ra $\alpha=0$, $\beta=0$ thì $f(x)$ không xác định.

Với $\alpha=0$, $\beta>0$, ta thu được hàm hằng dương $f(x)=\dfrac{1}{\beta}$ nên $f(a)=f(b)=f(c)>0$ và $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác đều.

Với $\alpha>0$, $\beta=0$, thì $f(x)=\dfrac{1}{\alpha x}$ không thỏa mãn bài toán (do nhận xét trên).

Xét trường hợp $\alpha>0$, $\beta>0$. Khi đó, với $a\geq b\geq c$, ta có
$$\alpha a+\beta\geq\alpha b+\beta\geq\alpha c+\beta>0.$$

Suy ra
$$\frac{1}{\alpha a+\beta}\leq\frac{1}{\alpha b+\beta}\leq\frac{1}{\alpha c+\beta}$$

hay
$$f(a)\leq f(b)\leq f(c).$$

Vậy ta cần xác định các số $\alpha>0$, $\beta>0$ sao cho luôn có $f(a)+f(b)>f(c)$ ứng với mọi tam giác ABC thỏa mãn $a\geq b\geq c$ hay
$$\frac{1}{\alpha a+\beta}+\frac{1}{\alpha b+\beta}>\frac{1}{\alpha c+\beta},\ \ \forall\Delta ABC: a\geq b\geq c. \tag{14}$$

Xét các tam giác cân ABC đồng dạng với tam giác cân cạnh 3, 3, 1, tức là $a=b=3d$, $c=d$ với $d>0$ tùy ý. Khi đó (14) có dạng
$$\frac{1}{3d\alpha+\beta}+\frac{1}{3d\alpha+\beta}>\frac{1}{d\alpha+\beta},\ \ \forall d>0.$$

Bất đẳng thức trên tương đương với
$$\frac{2}{3d\alpha+\beta}>\frac{1}{d\alpha+\beta},\ \ \forall d>0$$

hay

$$2d\alpha + 2\beta > 3d\alpha + \beta, \ \ \forall d > 0,$$

tức là $\beta > d\alpha$, $\forall d > 0$. Điều này không xảy ra khi d đủ lớn.

Vậy với $\alpha = 0$, $\beta > 0$, thì hàm số

$$f(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta},$$

(tức là hàm hằng, dương) có tính chất $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Trên đây là hai bài toán khá tổng quát để xác định một số hàm số có tính chất $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ là độ dài các cạnh của một tam giác, ứng với mọi tam giác ABC cho trước.

Bây giờ, ta cũng tiếp tục tìm kiếm những áp dụng cụ thể của bài toán trên và xét những trường hợp khác mà bài toán chưa đề cập.

Mệnh đề 2.1. *Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì*

$$\frac{1}{a+b}, \ \frac{1}{b+c}, \ \frac{1}{c+a}$$

cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+b} > \frac{1}{2(b+c)}.$$

Thật vậy

$$b + c > a \Rightarrow b + 2c > a \Rightarrow 2b + 2c > a + b \Rightarrow \frac{1}{a+b} > \frac{1}{2(b+c)}.$$

Tương tự, ta có

$$\frac{1}{c+a} > \frac{1}{2(b+c)}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a} > \frac{1}{b+c}.$$

Do đó, tương tự, ta có

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} > \frac{1}{c+a}, \frac{1}{c+a} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b}.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Mệnh đề 2.2. *Nếu h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao của một tam giác có ba cạnh* *a, b, c, thì* $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ *lập thành ba cạnh của một tam giác đồng dạng với tam giác đã cho.*

Chứng minh. Ta có

$$2S = \frac{a}{\left(\frac{1}{h_a}\right)} = \frac{a}{\left(\frac{1}{h_b}\right)} = \frac{a}{\left(\frac{1}{h_c}\right)}.$$

Suy ra $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ lập thành ba cạnh của một tam giác đồng dạng với tam giác có ba cạnh là a, b, c, tỉ số đồng dạng là $k = \frac{1}{2S}$.

Mệnh đề 2.3. *Độ dài các trung tuyến m_a, m_b, m_c lập thành ba cạnh của một tam giác.*

Chứng minh. *(Bạn đọc tự vẽ hình)* Giả sử tam giác ABC có các trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại G. Qua C_1 kẻ đường thẳng song song với AA_1, cắt BB_1, BC tại E, Q. Qua C kẻ đường thẳng song song với BB_1, cắt C_1Q tại P. Ta có

$$EG = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}m_b = \frac{1}{3}m_b;$$

$$\frac{EG}{PC} = \frac{C_1G}{C_1C} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow EG = \frac{1}{3}PC.$$

Suy ra $PC = m_b$. Ta có

$$\frac{C_1E}{C_1P} = \frac{C_1G}{C_1C} = \frac{1}{3} \Rightarrow C_1E = \frac{1}{3}C_1P;$$

$$C_1E = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}m_a = \frac{1}{3}m_a.$$

Suy ra $C_1P = m_a$ và $CC_1 = m_c$. Từ đó tam giác CC_1P có ba cạnh là m_a, m_b, m_c (đpcm).

Mệnh đề 2.4. *Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác A, B, C, thỏa mãn* $\min(A, B, C) \geq \frac{\pi}{12}$, *thì $\sqrt{ab}$, $\sqrt{bc}$, $\sqrt{ca}$ cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Gỉa sử $\sqrt{ab}$, $\sqrt{bc}$, $\sqrt{ca}$ không thể là độ dài ba cạnh của một tam giác. Khi đó ta phải có, chẳng hạn, bất đẳng thức sau

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} \leq \sqrt{ca}$$

hay

$$\sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \leq 1. \qquad (15)$$

Từ (15), suy ra $\min\left(\sqrt{\frac{b}{c}}, \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \leq \frac{1}{2}$, chẳng hạn $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2}$ hay $\frac{b}{c} \leq \frac{1}{4}$.
Theo Định lí Hàm số sin, suy ra $\frac{\sin B}{\sin C} \leq \frac{1}{4}$ hay

$$\sin B \leq \frac{1}{4}. \tag{16}$$

Ngoài ra, ta có

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} > \frac{1}{4}.$$

Từ đó ta có, góc nhọn α mà $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ thì $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$.
Bởi (16), ta có $\sin B \leq \sin\alpha$. Xét hai khả năng có thể xảy ra, như sau
- Nếu $B \leq \alpha < \frac{\pi}{12}$, thì điều này vô lí, vì $B \geq \min(A, B, C) \geq \frac{\pi}{12}$.
- Nếu $B \geq \pi - \alpha$, thì A và C đều nhỏ hơn $\frac{\pi}{12}$. Điều này cũng vô lý, vì $\min(A, B, C) \geq \frac{\pi}{12}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

2.2 Áp dụng

Từ Bài toán 2.2, ta có thể sáng tác được bài toán sau đây

Bài toán 2.3. *Chứng minh rằng không tồn tại tam giác có ba cạnh là*

$$\frac{1}{a+1}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{c+1},$$

trong đó a, b, c là ba cạnh của một tam giác (không phải là tam giác đều) nào đó.

Tiếp theo là một phương pháp để sáng tác một số bài toán khác.

Theo Mệnh đề 2.2, ta có $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ lập thành ba cạnh của một tam giác. Do đó $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} > \frac{1}{h_a}$. Vậy nếu ta chọn h_a, h_b, h_c sao cho $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \leq \frac{1}{h_a}$, thì $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ không thể lập thành ba cạnh của một tam giác. Chẳng hạn, chọn

$$h_a = 1, \ h_b = \sqrt{5}, \ h_c = 1 + \sqrt{5},$$

thì

$$\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{9\sqrt{5}-5}{20} < 1 = \frac{1}{h_a}.$$

Từ đó, ta sáng tác được bài toán sau

Bài toán 2.4. *Chứng minh rằng không tồn tại tam giác có ba đường cao là*

$$h_a = 1,\ \ h_b = \sqrt{5},\ \ h_c = 1 + \sqrt{5}.$$

Ta tiếp tục tìm kiếm những phương pháp khác nữa.

Bây giờ, ta biết rằng, nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác, thì

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2\left(ab + bc + ca\right). \tag{17}$$

Thật vậy, ta có

$$a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ca.$$

Tương tự, ta có

$$b^2 < bc + ab, c^2 < ca + bc.$$

Suy ra điều phải chứng minh.
Ngoài ra, ta có thể chứng minh được rằng

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}, \tag{18}$$

với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
Thật vậy, ta có

$$S = rp = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right).$$

Suy ra

$$\frac{1}{r} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Vì $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ lập thành ba cạnh của một tam giác (theo Mệnh đề 2.2) nên từ (17) và (18), ta có

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} < 2\left(\frac{1}{h_ah_b} + \frac{1}{h_bh_c} + \frac{1}{h_ch_a}\right).$$

Vậy

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)^2 < 4\left(\frac{1}{h_ah_b} + \frac{1}{h_bh_c} + \frac{1}{h_ch_a}\right).$$

Tóm lại, từ các phương pháp phối hợp trên đây, ta đã tạo ra được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.1. $\dfrac{1}{h_ah_b} + \dfrac{1}{h_bh_c} + \dfrac{1}{h_ch_a} > \dfrac{1}{4r^2}.$

Hơn nữa, phối hợp các mệnh đề và áp dụng các công thức trên, ta sẽ thu được nhiều kết quả thú vị. Chẳng hạn, từ Mệnh đề 2.3, bởi (17), ta có bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2.2. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 < 2\,(m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a).$

Một cách phối hợp khác, chẳng hạn, từ Mệnh đề 2.2 ta biết rằng $\dfrac{1}{h_a}, \dfrac{1}{h_b}, \dfrac{1}{h_c}$ lập thành ba cạnh của một tam giác. Do đó, theo Mệnh đề 2.1, ta có

$$\frac{1}{\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b}}, \quad \frac{1}{\dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}}, \quad \frac{1}{\dfrac{1}{h_c} + \dfrac{1}{h_a}}$$

hay

$$\frac{h_a h_b}{h_a + h_b}, \quad \frac{h_b h_c}{h_b + h_c}, \quad \frac{h_c h_a}{h_c + h_a}$$

cũng lập thành ba cạnh của một tam giác.

Từ nhận xét trên, ta thiết lập được bất đẳng thức sau đây

Bất đẳng thức 2.3. $\dfrac{h_a h_b}{h_a + h_b} + \dfrac{h_b h_c}{h_b + h_c} > \dfrac{h_c h_a}{h_c + h_a}.$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, Nguyễn Minh Tuấn, *Chuyên đề chọn lọc lượng giác và áp dụng*, NXB Giáo dục, 2008.

[2] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), Trịnh Đào Chiến, Trần Nam Dũng, *Chuyên đề chọn lọc đa thức và áp dụng*, NXB Giáo dục, 2008.

Một số nhận xét về Định lý Casey

Nguyễn Bá Đang, Hải Dương

Kì thi Olympic toán học quốc tế lần thứ 52 (IMO 2011) được tổ chức tại Amsterdam Hà Lan. Mặc dù không tính giải đồng đội song xếp theo số điểm đoàn Việt Nam xếp thứ 31 trong tổng số 101 nước tham gia. Nhiều năm qua học sinh Việt Nam "rất mạnh" về hình học phẳng, nhưng năm đó hai bài hình học phẳng cả đoàn chỉ giành được hai điểm. Phải nói rằng bài hình học số 2 của Anh (là bài hình học tổ hợp) và bài hình học số 6 của Nhật Bản là hai bài khó. Bài số 6 đã sử dụng một định lí quen thuộc, đó là định lí Casey, còn được gọi là tổng quát của định lí Ptolemy trong hình học Euclide mang tên nhà toán học John Casey Ailen. Xin giới thiệu định lí Casey và ứng dụng của nó.

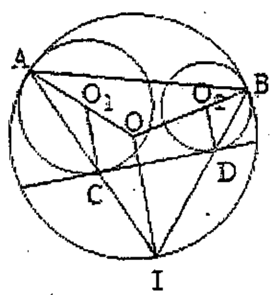
1 Bài toán

Cho hai đường tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2) không giao nhau, đồng thời tiếp xúc với đường tròn (O, R) tại A và B. d_{12} là độ dài tiếp tuyến chung của đường tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2).Chứng minh

$$d_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R \pm r_1)(R \pm r_2)}$$

Chứng minh:

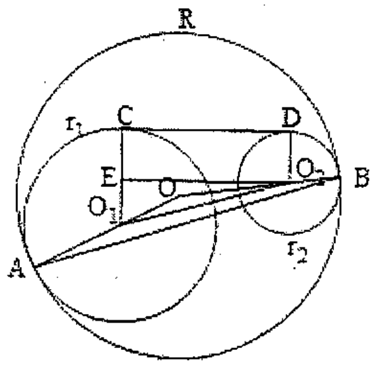
Cách 1

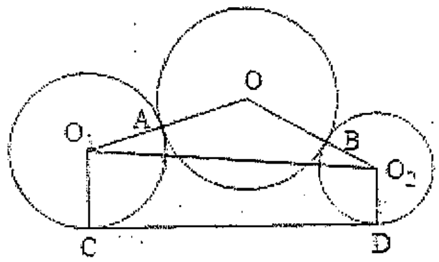


CD là tiếp tuyến chung nên $O_1C \perp CD$, $O_2D \perp CD$.
Đường tròn $(O_1; r_1)$ tiếp xúc đường tròn(O;R) $\Rightarrow A, O_1, O$ thẳng hàng, AC cắt đường tròn (O;R) tại I.

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{AIO} \Rightarrow O_1C//OI \Rightarrow OI \perp CD$
$\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IDC} \Rightarrow \Delta$ IAB đồng dạng với Δ IDC
$\Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{ID}{IA} = \frac{IC}{IB} = \sqrt{\frac{IC}{IA}\frac{ID}{IB}} = \sqrt{\frac{OO_1}{OA}\frac{OO_2}{OB}}$
$\Rightarrow d_{12} = CD = \frac{AB}{R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}$

Cách 2 $O_2E \perp O_1C$, giả sử $r_1 > r_2$ $d_{12}^2 = CD^2 = O_2E^2 = O_1O_2^2 - O_1E^2 = O_1O_2^2 - (r_1 - r_2)^2$





Đặt $\widehat{AOB} = \alpha$, Δ O_1OO_2
$O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1.OO_2\cos\alpha$
$O_1O_2^2 = (R-r_1)^2 + (R-r_2)^2 - 2(R-r_1).(R-r_2)\cos\alpha(1)$
Mặt khác $AB^2 = R^2 + R^2 - 2R.R\cos s\alpha = 2R^2(1-\cos\alpha)$
$\Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{AB^2}{2R^2}$
thay vào (1) $\Rightarrow d_{12}^2 = (R-r_1)^2 + (R-r_2)^2 - (r_1-r_2)^2 - 2(R-r_1).(R-r_2)(1-\frac{AB^2}{2R^2})$
$\Rightarrow d_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R-r_1)(R-r_2)}.$

Trường hợp hai đường tròn $(O_1; r_1)$và $(O_2; r_2)$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $(O; R)$ thì đẳng thức

$$d_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)}$$

Trường hợp một đường tiếp xúc trong, một đường tròn tiếp xúc ngoài với $(O; R)$ thì

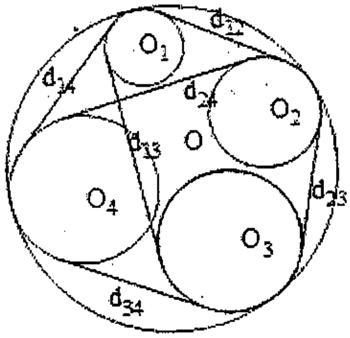
$$d_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R-r_1)(R+r_2)}$$

2 Định lý Casey

Cho đường tròn (O; R), các đường tròn tâm O_1, O_2, O_3, O_4 không giao nhau, đồng thời tiếp xúc với đường tròn (O; R). (kí hiệu d_{ij}, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3, 4$ là độ dài tiếp tuyến chung của đường tròn O_i và O_j). Chứng minh $d_{12}.d_{34} + d_{14}.d_{23} = d_{13}.d_{24}$. *(Cả bốn đường tròn tâm O_1, O_2, O_3, O_4 suy biến thành một điểm đó chính là* ***định lí Ptolemy****)*

Chứng minh:

$d_{12}.d_{34} + d_{14}.d_{23} = d_{13}.d_{24}$,



$$d_{12}.d_{34} + d_{14}.d_{23} = \frac{1}{R^2}\sqrt{R-R_1}\sqrt{R-R_2}\sqrt{R-R_3}\sqrt{R-R_4}(AB.CD + BC.DA$$

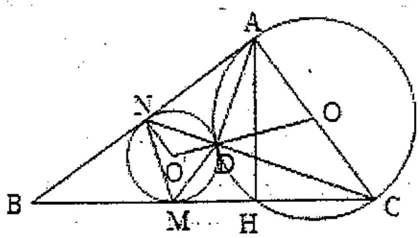
$$= \frac{1}{R^2}\sqrt{R-R_1}\sqrt{R-R_2}\sqrt{R-R_3}\sqrt{R-R_4}BD.AC = d_{13}.d_{24}.$$

Trường hợp có cả tiếp xúc trong và ngoài như hình vẽ trên.

$$\begin{aligned} d_{12}.d_{34} + d_{14}.d_{23} &= \frac{AB.CD}{R^2}\sqrt{(R-R_1)(R+R_2)(R-R_3)(R-R_4)} \\ &+ \frac{BC.AD}{R^2}\sqrt{(R+R_2)(R-R_3)(R-R_1)(R-R_4)} \\ &= \frac{1}{R^2}\sqrt{(R+R_2)(R-R_3)(R-R_1)(R-R_4)}(AB.CD + BC.AD) \\ &= \frac{1}{R^2}\sqrt{(R+R_2)(R-R_3)(R-R_1)(R-R_4)}AC.BD = d_{13}.d_{24}. \end{aligned}$$

3 Áp dụng

Ví dụ 3.1. Cho tam giác ABC ($AB \perp AC$), đường cao AH, H trên cạnh BC. Đường tròn tâm (O) ngoại tiếp tam giác AHC, đường tròn tâm O' tiếp xúc đường tròn (O) đồng thời tiếp xúc với cạnh BC tại M, cạnh AB tại N. Chứng minh: $CH.AN + BC.HM = CH.CM$ và $CA = BM$.



Lời giải.
A, C, H là các đường tròn suy biến tiếp xúc với đường tròn tâm (O), và đường tròn (O') tiếp xúc đường tròn (O), độ dài các tiếp tuyến:

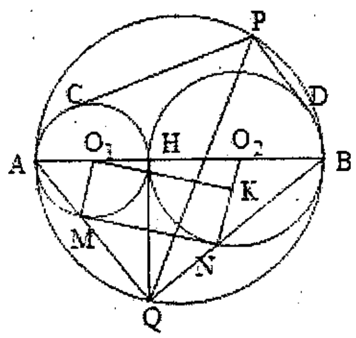
$d_{CH} = CH,\ d_{AO'} = AN, d_{AC} = AC,\ d_{HO'} = HM,\ d_{CH} = CH,\ d_{CO'} = CM.$

Theo định lý Casey $\Rightarrow CH.AN + BC.HM = CH.CM.$

Gọi D là điểm tiếp xúc của hai đường tròn (O) và (O'), $AH \perp BC \Rightarrow$ AC là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC $\Rightarrow \widehat{CDA} = 90^0$
$\Rightarrow$ O, D, O' thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{DNA} + \widehat{DAN} = \frac{1}{2}(\widehat{DO'N} + \widehat{DOA}) = \frac{1}{2}(360^0 - \widehat{O'NA} - \widehat{OAN}) = 90^0 \Rightarrow$
C, D, N thẳng hàng $\Rightarrow$ tam giác CAN vuông $\Rightarrow CA^2 = CD.CN$ $\widehat{DNM} = \widehat{DMH}$
$\Rightarrow \Delta$CNM và ΔCMD đồng dạng $\Rightarrow \frac{CN}{CM} = \frac{CM}{CD} \Rightarrow CM^2 = CD.CN \Rightarrow CA = BM.$

Ví dụ 3.2. Cho đường tròn đường kính ABP và Q là hai điểm trên đường tròn sao cho P và Q không cùng phía với AB, H là hình chiếu vuông góc của Q trên AB. Gọi C và D là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ P đến hai đường tròn đường kính AH và BH. Chứng minh rằng $PC + PD = PQ$

Lời giải. Dựng tiếp tuyến chung của đường tròn (O_1) và (O_2) với đường kính AH và BH,

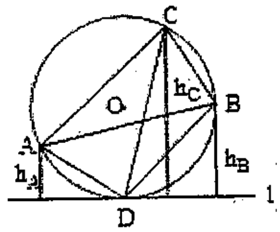


gọi hai tiếp điểm là M, N. Áp dụng định lý Casey cho các đường tròn đường kính AH, BH và các đường tròn suy biến thành các điểm P và Q $\Rightarrow PC.QH + PD.QH = PQ.MN$
$\Rightarrow PC + PD = PQ\frac{MN}{QH}$ (1)
Mặt khác

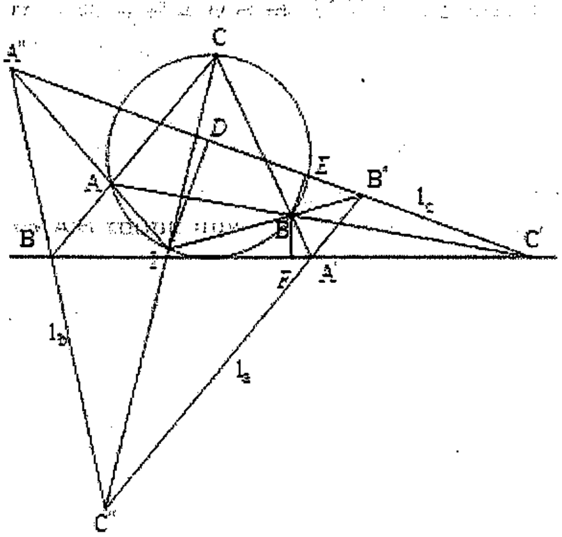
$MN^2 = O_1K^2 = O_1O_2^2 - O_2K^2$ $MN^2 = 4O_1H.O_2H = HA.HB \Rightarrow MN = \sqrt{HA.HB}$
ΔAQB là tam giác vuông $\Rightarrow QH^2 = HA.HB \Rightarrow QH = \sqrt{HA.HB} \Rightarrow PC + PD = PQ$.

Ví dụ 3.3. (IMO - 2011) Cho tam giác ABC nhọn và đường tròn ngoại tiếp G. Giả sử l là một tiếp tuyến nào đó của G, và giả sử l_a, l_b, và l_c là những đường thẳng nhận được bằng cách lấy đối xứng l qua cạnh BC, CA, và AB tương ứng.
Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tạo bởi các đường thẳng l_a, l_b, và l_c tiếp xúc với đường tròn G.

Lời giải.
Trước hết chứng minh **bổ đề:**
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), l là tiếp tuyến của đường tròn (O). Gọi h_A, h_B, h_C lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến đường thẳng l.
Chứng minh $\sqrt{h_A}\sin A + \sqrt{h_B}\sin B = \sqrt{h_C}\sin C$
Chứng minh.



Theo định lí Ptolemy $\Rightarrow DA.BC + DB.CA = DC.AB \Rightarrow DA\sin A + DB\sin B = DC\sin C$ (1)
Gọi α là góc tạo bởi l và AD $\Rightarrow AD = \frac{h_A}{\sin\alpha} = \frac{h_A 2R}{AD} \Rightarrow AD = \sqrt{2Rh_A}$
tương tự $BD = \sqrt{2Rh_B}$, $CD = \sqrt{2Rh_C}$
Thay vào (1) $\Rightarrow \sqrt{h_A}\sin A + \sqrt{h_B}\sin B = \sqrt{h_C}\sin C$. Gọi A' là giao điểm của l và l_a, B' là giao điểm của l và l_b, C' là giao điểm của l và l_c
Gọi A'' là giao điểm của l_b, l_c, B'' là giao điểm của l_c, l_a, C'' là giao điểm của l_a, l_b
$\Rightarrow \widehat{A''C''B''} = \widehat{A''B'A'} - \widehat{C''A'B'} = 2\widehat{CB'A'} - (180^0 - 2\widehat{CA'B'}) = 180^0 - 2\widehat{C}$,
tương tự: $\widehat{A''B''C''} = 180^0 - 2\widehat{B}$ và $\widehat{B''A''C''} = 180^0 - 2\widehat{A}$
Mặt khác l, l_ađối xứng qua BC $\Rightarrow A'B$ là phân giác $\widehat{B'A'B''}$,
tương tự $C'B$ là phân giác $\widehat{A'C'B''} \Rightarrow$ B là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác $B''A'C'$ứng với đỉnh C'.
Từ đó $B''B$ là phân giác $\widehat{A''B''C''}$, $A''A$ là phân giác $\widehat{B''A''C''}$và $C''C$ là phân giác $\widehat{B''C''A''}$
$B''B$, $A''A$, $C''C$đồng quy , gọi điểm đó là I $\Rightarrow$ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A''B''C''$.
$\widehat{IAB} = \widehat{AA''C'} + \widehat{AC'A''} = \frac{1}{2}\left(\widehat{B'A''C'} + \widehat{B'C'A''}\right) = \frac{1}{2}\widehat{A'B'C''}$.
tương tự $\widehat{AIB} = \frac{1}{2}\widehat{B'A'C''}$



$$\widehat{AIB} = 180^0 - \widehat{IA''B''} - \widehat{IB''A''} = 180^0 - \frac{1}{2}\widehat{C''A''B''} - \frac{1}{2}\widehat{C''B''A''}$$

$$= 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{A''C''B''} = 90^0 + \frac{1}{2}(180^0 - 2\widehat{C}) = 180^0 - \widehat{ACB}$$

$\Rightarrow$ I thuộc đường tròn G.

Gọi D là chân đường vuông góc từ I đến $A''B''$ $\Rightarrow$ $ID = r$ là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $A''B''C''$

E và F là chân đường vuông góc của B đến $C'A''$ và $C'B'$ $\Rightarrow$ $BE = BF = h_B$.

Gọi $d(M)$ là độ dài của tiếp tuyến từ điểm M ở ngoài đường tròn đến (G).

Từ $\widehat{A''B''I} = \frac{1}{2}\widehat{A''B''C''} = 90^0 - \widehat{B}$

$$\Rightarrow d(B'') = \sqrt{B''B.B''I} = \sqrt{\frac{BE}{\sin(90^0 - B)}\frac{ID}{\sin(90^0 - B)}} = \frac{\sqrt{rh_B}}{\cos B}$$

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $A''B''C''$

$$\Rightarrow d(B'').A''C'' = \frac{\sqrt{rh_B}}{\cos B}2R\sin(180^0 - 2B) = 4R\sqrt{r}\sqrt{h_B}\sin B$$

tương tự: tính được $d(A'').B''C''$ và $d(C'').A''B''$.

Áp dụng định lí Casey ta có $d(A'').B''C'' + d(B'').A''C'' = d(C'').A''B''$.

Tài liệu tham khảo

1- Mathematical Excalibur – March April 2012

2- Casey's Theotem and its Applications Luis Gonza'lez July 2011.

Tính chất nghiệm của phương trình Schröder, Abel và áp dụng

Nguyễn Văn Mậu, ĐHKHTN Hà Nội

Mục đích của bài này nhằm trình bày một số kết quả đã biết về hai lớp phương trình hàm quan trọng là phương trình Schröder và Abel và nêu một số áp dụng của chúng vào giải phương trình vi phân và sai phân có chậm.

1 Tính chất nghiệm của phương trình Schröder

Trước hết, ta quan tâm đến lớp nghiệm đơn điệu của phương trình Schröder.

Định lý 1. Giả sử $X = [0;\ a]$, $0 < a \leq \infty$ và $\omega :\ X \to X$ là hàm liên tục và đồng biến trên X, $0 < \omega(x) < x$ trong $X \backslash \{0\}$, hàm $x \to \omega(x)/x$ đơn điệu trên $X \backslash \{0\}$ và $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\omega(x)}{x} = s(0 < s < 1)$. Khi đó phương trình Schröder:

$$f(\omega(x)) = s.f(x) \tag{1}$$

có duy nhất một họ nghiệm $f : X \to \mathbb{R}$ sao cho hàm $f(x)/x$ là đơn điệu trên $X \backslash \{0\}$ và các nghiệm này được cho bởi công thức:

$$f(x) = c. \lim_{n\to\infty} \frac{\omega^n(x)}{\omega^n(x_0)}, \tag{2}$$

trong đó c là hằng số thực tùy ý và x_0 là một điểm cố định tuỳ ý trong $X \backslash \{0\}$.
Chứng minh. Nếu $0 \in X$ thì $f(0) = 0$ theo (1) thỏa mãn (2).
Vì vậy, $f : X \to \mathbb{R}$ là một nghiệm của (1) sao cho $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \in X \backslash \{0\}$ đơn điệu khi và chỉ khi φ là một nghiệm đơn điệu của phương trình:

$$\varphi(\omega(x)) = \frac{s.x}{\omega(x)}.\varphi(x) \tag{3}$$

trong $X \backslash \{0\}$.

Tiếp theo, xét tính lồi của nghiệm của phương trình Schröder tương ứng.
Xét phương trình Schröder:

$$f(\omega(x)) = sf(x). \tag{4}$$

Định lý 2. Giả sử $X = [0;\ a], 0 < a \leq \infty$ và $\omega : X \to X$ là lồi hoặc lõm, đồng biến trên $X \setminus \{0\}$ và $\lim\limits_{x\to 0} [\omega(x)/x] = s,\ \ (0 < s < 1)$. Khi đó phương trình (4) có duy nhất một họ nghiệm $f : X \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi hoặc lõm trên X. Các nghiệm này được cho bởi công thức:

$$f(x) = c.\lim_{n\to\infty} \frac{\omega^n(x)}{\omega^n(x_0)}, \tag{5}$$

trong đó $c \in \mathbb{R}$ là hằng số tùy ý và x_0 là một điểm tùy ý được chọn trong $X \setminus \{0\}$.
Chứng minh. Từ hàm tỷ số $\omega(x)/x$ là đơn điệu với ω là hàm lồi hoặc lõm, từ định lý 1 ta có các hàm (5) là các nghiệm của phương trình (4) sao cho $f(x)/x$ là hàm đơn điệu. Mọi hàm ω^n $(n \in \mathbb{N})$ là các hàm lõm hoặc lồi nên f cho bởi công thức (5) cũng vậy. Hơn nữa, do nghiệm $f : X \to \mathbb{R}$ của (4) là lõm hoặc lồi nên $f(x)/x$ là đơn điệu và kéo theo tính duy nhất.

Ta khảo sát lớp nghiệm khả vi của phương trình Schröder.
Xét phương trình Schröder:

$$f(\omega(x)) = sf(x). \tag{6}$$

Giả thiết rằng
(i) $X = [0, a[,\ \ 0 < a \leq \infty$,
(ii) $\omega : X \to X$ thuộc lớp C^1 trên X, $0 < \omega(x) < x,\ \ \omega'(x) > 0$ trên $X \setminus \{0\}$ và $\omega'(x) = s + O(x^\delta),\ \ x \to 0,\ \ \delta > 1,\ \ 0 < s < 1$.

Nhận xét 1. Khi $\omega \in C^2(X)$ và $\omega'(0) = s$ thì quan hệ tiệm cận (ii) tất nhiên luôn được thoả mãn.

Định lý 3. Nếu các giả thiết (i), (ii) được thoả mãn thì phương trình (6) có một nghiệm duy nhất $f : X \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên X thoả mãn $f'(0) = 1$. Nghiệm này cho bởi công thức:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{ims}^{-n}\omega^n(x) \tag{7}$$

và là hàm đồng biến trên X, thoả mãn điều kiện:

$$f'(x) = 1 + O(x^\delta),\ x \to 0 \tag{8}$$

Xét tính trơn của nghiệm của phương trình Schröder trong $\mathbb{R}^N$.
Xét phương trình Schröder:

$$f(\omega(x)) = Sf(x), \tag{9}$$

trong đó $S \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Phương trình (9) có nghiệm trơn khi S và $\omega'(0)$ liên hợp ($\omega'(0) = C.S.C^{-1}$) vì thế ta có thể giả sử $\omega'(0) = S$.
Giả sử rằng
(i) X là một lân cận của 0 trong $\mathbb{R}^N$ và $\omega : X \to \mathbb{R}^N$ là hàm thuộc lớp C^r, $r \geq 1,\ \ \omega(0) = 0,\ \ \omega'(0) = S,\ \ \det(S) \neq 0$.
(ii) $\omega^{(r)}(x) = \omega^{(r)}(0) + O\left(|x|^\delta\right),\ \ x \to 0,\ \ 0 \leq r \leq 1$.

Định lý 4. Nếu các giả thiết (i) và (ii) được thỏa mãn và các nghiệm đặc trưng $s_1, s_2, \ldots, s_N$ của S thỏa mãn các điều kiện $0 \leq |s_1| \leq \cdots \leq |s_N| \leq 1$:

$$s_1^{q_1} \cdots s_N^{q_N} \neq s_i \text{ với } i = 1, \ldots, N, \; q_1, \ldots, q_N \in \mathbb{N}_0, \tag{10}$$

trong đó $\sum_{j=1}^{N} q_j = p, \; p = 2, \ldots, r$ được thỏa mãn và nếu $|s_N|^{r+\delta} < |s_1|$ thì phương trình (9) có duy nhất một nghiệm thuộc lớp C^r là $f : U \to \mathbb{R}^N$ trong lân cận U của gốc toạ độ sao cho $f(0) = 0, \; f'(0) = E$ và $f^{(r)}(x) = f^{(r)}(0) + O\left(|x|^{\delta}\right), \; x \to 0$.

Nhận xét 2. Cho $\delta = 0$ từ định lý 4 thu được sự tồn tại duy nhất nghiệm f của (9) thuộc lớp C^r sao cho $f(0) = 0, \; f'(0) = E$ với giả thiết rằng ω là hàm thuộc lớp C^r trên $X, \omega(0) = 0, \; \omega'(0) = S, \; |s_N|^r / |s_1| < 1$ và điều kiện (10) đúng với $p = 2, \ldots, r$ (xem S. Sternberg [3])

Định lý sau được trích từ Hartman [1] và Hartman [4].

Định lý 5. Nếu giả thiết (i) được thỏa mãn với $r \geq 2$ và $|s_k| < 1$ với $k = 1, \ldots, N$ ở đó s_k là các nghiệm đặc trưng của S thì phương trình (9) có nghiệm $f : U \to \mathbb{R}^N$ thuộc lớp C^1 trong lân cận U của gốc toạ độ thỏa mãn điều kiện $f'(0) = E$.

Nếu không phải mọi nghiệm đặc trưng của S đều nằm bên trong hình tròn đơn vị thì ta có định lý sau (xem Sternberg [4])

Định lý 6. Nếu giả thiết (i) được thỏa mãn với $r \geq 2$ và $|s_k| \neq 1$ với $k = 1, \ldots, N$ ở đó s_k là các nghiệm đặc trưng của S, nếu điều kiện (10) được thỏa mãn với $p = 2, \ldots, r$ thì phương trình (9) có một nghiệm $f : U \to \mathbb{R}^N$ thuộc lớp $C^\rho, \; 1 \leq \rho \leq r$ trong lân cận U của gốc toạ độ thỏa mãn điều kiện $f'(0) = E$. Hơn nữa, $\rho \to \infty$ khi $r \to \infty$ và $\rho = \infty$ khi $r = \infty$.

Ta khảo sát lớp nghiệm giải tích của phương trình Schröder.

Áp dụng định lý 5 vào phương trình Schröder:

$$f(\omega(x)) = s.f(x), \tag{11}$$

ta thu được một định lý nổi tiếng của G.Koenigs[1].

Định lý 7. Giả sử $X \subset \mathbb{C}$ là một lân cận gốc toạ độ, $\omega : X \to \mathbb{C}$ là một hàm giải tích thoả mãn điều kiện

$$\omega(0) = 0, \omega'(0) = s, \;\; 0 < |s| < 1,$$

thì phương trình (11) có duy nhất một nghiệm giải tích địa phương là f thoả mãn $f'(0) = 1$, nghiệm này cho bởi công thức

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s^{-n} \omega^n(x). \tag{12}$$

Chứng minh. Vì $S(\omega'(0))^k = S^{k+1} \neq 1, \; \forall k \in \mathbb{N}$ nên phương trình (11) có nghiệm duy nhất. Do vậy, sự tồn tại duy nhất nghiệm giải tích địa phương f của (11) được kéo theo từ định lý 5. Công thức (12) thu được bằng lập luận mà ta đã dùng trong chứng minh định lý 3 (công thức (7)).

Nhận xét 3. Nếu một hàm khả nghịch f thoả mãn phương trình (11) thì nghịch đảo của nó $\varphi = f^{-1}$ thoả mãn phương trình Poincaré:

$$\varphi(sx) = \omega(\varphi(x))$$

Trong trường hợp $|s| = 1$ mà s không là căn của đơn vị thì kết quả thu được từ định lý 7, còn trường hợp s là căn của đơn vị thì ta có kết quả sau.

Định lý 8. Giả sử các điều kiện của định lý 7 được thoả mãn ngoại trừ s là căn bậc p của đơn vị thì phương trình (11) có một nghiệm giải tích địa phương f thoả mãn $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ khi và chỉ khi $\omega^p = id$ và khi đó nghiệm này là không duy nhất.
Chứng minh. Từ (11) ta có $f(\omega^p(x)) = f(x)$. Vì thế $\omega^p = id$ nếu f là một nghiệm giải tích địa phương khả nghịch của (11). Đảo lại, nếu $\omega^p = id$ và $g : X \to \mathbb{C}$ là một hàm giải tích tuỳ ý thì:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{p-1} s^{-i} g(\omega^i(x)) \tag{13}$$

là một nghiệm giải tích địa phương của (11). Nếu $g(0) = 0$ và $g'(0) = p^{-1}$ thì $f(0) = 0$ và $f'(0) = 1$. Công thức (13) với g chạy khắp họ các hàm giải tích tại gốc toạ độ sẽ cho ta nghiệm giải tích địa phương tổng quát của phương trình trong trường hợp $\omega^p = id$. Thực tế mọi nghiệm f đều biểu diễn được dưới dạng (13) với $g(x) = p^{-1}f(x)$.

Định lý 9. Cho $X \subset \mathbb{C}$ là một lân cận của gốc toạ độ, là một hàm giải tích, $\omega(0) = 0$, $s = \omega'(0) \neq 0$. Nếu s không là căn của đơn vị và f_0 là một nghiệm giải tích địa phương không tầm thường của phương trình (11) thì $f_0'(0) \neq 0$ và nghiệm giải tích địa phương tổng quát của (11) được cho bởi công thức $f(x) = c.f_0(x)$ ở đó $c \in \mathbb{C}$ là hằng số bất kỳ.
Chứng minh. Giả sử $f'_0(0) = 0$, do $s \neq 0$ nên ta có $f_0(0) = 0$ và vì vậy $f_0(x) = x^p.\varphi(x)$, $p \geq 1$, $\varphi(0) \neq 0$. Vì thế $\varphi(\omega(x)) = s(x/\omega(x))^p\varphi(x)$ và thay $x = 0$ vào ta được $\varphi(0) = \varphi(0).s^{1-p} \Rightarrow s^{1-p} = 1$ đây là một mâu thuẫn vậy $f'_0(0) \neq 0$. Gọi f là một nghiệm giải tích địa phương tùy ý của (11), $f(0) = 0$ và vì vậy hàm $\omega = f/f_0 - c$ với $c = f'(0)/f'_0(0)$ là một hàm giải tích trong một lân cận của gốc toạ độ và $\omega(0) = 0$. Hơn nữa, áp dụng (11) cho f và f_0 ta có $\omega(\omega(x)) = \omega(x)$ trên X. Dể thấy rằng $\omega = 0$ vì thế $f = c.f_0$.

Nhận xét 4. Dưới giả thiết của định lý 9 thì phương trình $\omega(\omega(x)) = \omega(x)$ chỉ có nghiệm giải tích địa phương là hằng số $\omega = \omega(0)$. Vì nếu $\omega(x) - \omega(0) = x^k\Omega(x)$, $k \in \mathbb{N}$, $\Omega(0) \neq 0$ thì $(\omega(x)/x)^k\Omega(\omega(x)) = \Omega(x)$ do $s^k\Omega(0) = \Omega(0)$ khi $x \to 0$ và $s^k \neq 1$ ta có $\Omega(0) = 0$, đây là một mâu thuẫn.

Cho S là một ma trận, $S \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Ta ký hiệu hàm chưa biết là f. Như vậy ta có phương trình Schröder:

$$f(\omega(x)) = S.f(x). \tag{14}$$

Nếu hàm ω có điểm cố định tại gốc toạ độ và khả vi tại đó thì phương trình (14) có thể có nghiệm trơn chỉ khi ma trận S và $\omega'(0)$ là liên hợp tức là $\omega(0) = C.S.C^{-1}$. Đặt $\widehat{f} = c.f$, ta thu được $\widehat{f}$ là nghiệm cuả phương trình:

$$\widehat{f}(\omega(x)) = \omega'(0).\widehat{f}(x).$$

Vì vậy, trong phần tiếp theo ta sẽ giả sử rằng

$$\omega'(0) = S. \tag{15}$$

Để tìm nghiệm giải tích địa phương của phương trình Schröder trong $\mathbb{C}^N$ ta giả sử:
(i) X là một lân cận của 0 trong $\mathbb{C}^N$ và $\omega : X \to \mathbb{C}^N$ là một hàm giải tích $\omega(0)$, $\omega'(0)$, $\det S \neq 0$.
Đạo hàm hai vế (14) và thay $x = 0$, ta có

$$f'(0).S = S.f'(0),$$

điều này được thoả mãn, chẳng hạn với $\eta_1 = f'(0) = E$, E là ma trận đơn vị cấp N. Trong trường hợp tổng quát, các ma trận $\eta_p = f^{(p)}(0)$, p = 2, 3, ... phải thoả mãn hệ vô hạn các phương trình có được bằng cách đạo hàm (14), p lần và sau đó thay $x = 0$ vào. Với $p \geq 2$ thì η_p có thể tồn tại hoặc không. Tuy nhiên, theo kết quả của W.Smajdor [4] về các nghiệm hình thức của các phương trình không tuyến tính thì với mọi $p \geq 2$, η_p được xác định duy nhất khi:

$$s_{k_1} \ldots . s_{k_p} \neq s_i; \;\; i, k_1, \ldots\ldots, k_p = \overline{1, N}, p = 2, 3, \ldots\ldots, \tag{16}$$

trong đó, S_k là các nghiệm đặc trưng của S, điều kiện (16) có thể viết lại tương ứng với:

$$s_1^{q_1} \ldots . s_N^{q_N} \neq s_i; \; i = \overline{1, N}, \;\; q_1, \ldots . q_N \in \mathbb{N}_0, \tag{17}$$

trong đó $\sum\limits_{j=1}^{N} q_j = p$, $p = 2, 3, \ldots$.

Định lý 10. Nếu giả thiết (i) được thoả mãn, điều kiện (17) và
$|s_i| < 1$ với $i = \overline{1, N}$
được thoả mãn với $s_1, \ldots, s_N$ là các nghiệm đặc trưng của S thì phương trình (14) có duy nhất một nghiệm giải tích địa phương $f : U \to \mathbb{C}^N$ trong một lân cận U của gốc toạ độ, thoả mãn điều kiện $f'(0) = E$.

2 Tính chất nghiệm của phương trình Abel

Trước hết, ta khảo sát lớp nghiệm lồi của phương trình Abel.
Ta giả thiết rằng:
(i) $X = (0;\; a], 0 < a \leq \infty$
(ii) $\omega : X \to X$ là lõm và đồng biến, $0 < \omega(x) < x$ trên X và $\lim\limits_{n \to 0} [\omega(x)/x] = 1$.

Bổ đề 1. Nếu các giả thiết (i)-(ii) được thoả mãn thì $\forall x, \; y \in X$ tồn tại giới hạn $\alpha(x, y) = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n(x, y)$, trong đó:

$$\alpha_n(x, y) = \frac{\omega^n(x) - \omega^n(y)}{\omega^{n+1}(x) - \omega^{n+1}(y)} \tag{18}$$

và với mọi y cố định thuộc X hàm $\alpha(., y)$ thoả mãn phương trình Abel:

$$\alpha(\omega(x), y) = \alpha(x, y) + 1. \tag{19}$$

Chứng minh. Trước tiên lấy $x \in [\omega(x);\ y)$ thì $y_{n+1} \leq x_n \leq y_n$, từ ω là hàm lõm nên sai phân của nó giảm

$$\frac{\omega(y_{n+1}) - \omega(y_n)}{y_{n+1} - y_n} \geq \frac{\omega(x_n) - \omega(y_n)}{x_n - y_n}$$

vì vậy $0 < \alpha_{n+1}(x, y) \leq \alpha_n(x, y) \quad (= (x_n - y_n)/(y_{n+1} - y_n))$ và giới hạn (18) tồn tại trong $[\omega(y);\ y]$. Với các giá trị khác của X trong X kết quả hội tụ thu được từ đẳng thức:

$$\alpha_n(\omega(x),\ y) = \alpha_n(x,\ y) + \frac{\omega^{n+1}(x) - \omega^n(x)}{\omega^{n+1}(y) - \omega^n(y)}$$

và cho $n \to \infty$, ta thu được (19).

Xét phương trình Abel

$$\alpha(\omega(x)) = \alpha(x) + 1 \tag{20}$$

ta thu được định lý sau:

Định lý 11. Nếu các giả thiết (i) và (ii) được thoả mãn thì phương trình (20) có duy nhất một họ nghiệm lồi $\alpha : X \to \mathbb{R}$. Các nghiệm này được cho bởi công thức

$$\alpha(x) = c + \lim_{n\to\infty} \frac{\omega^n(x) - \omega^n(x_0)}{\omega^{n+1}(x_0) - \omega^n(x_0)}, \tag{21}$$

trong đó $x_0 \in X$ là một điểm cố định bất kỳ, $c \in \mathbb{R}$ là một hằng số bất kỳ. Hơn nữa, chúng giảm nghiệm ngặt trên X.

Chứng minh. Theo bổ đề 1, từ mọi ω^n là hàm tăng và $\omega^{n+1}(x_0) < \omega^n(x_0)$ nên α cho bởi (21) là giảm, lồi và nó là hằng hoặc giảm nghiêm ngặt trong một lân cận của gốc toạ độ (điều này có được từ (20)). Khi đó (20) chứng tỏ rằng α là giảm nghiêm ngặt trên X.

Xét tính khả vi của nghiệm của phương trình Abel.

Trước hết, xuất phát từ nghiệm của phương trình Julia:

$$\lambda(\omega(x)) = \omega'(x).\lambda(x) \tag{22}$$

trong lớp hàm

$$\mathbb{D} = \{\varphi :\ X \to \mathbb{R},\ \varphi \text{ liên tục trên } X \text{ và khả vi tại } x = 0.$$

Ta giả thiết rằng:

(i) $X = [0, a],\ 0 < a \leq \infty$

(ii) $\omega : X \to X$ thuộc lớp C^1 trên X, $0 < \omega(x) < x,\ \omega'(x) > 0$ trên $X \setminus \{0\}$ và $\omega'(x) = s + O(x^\delta),\ x \to 0,\ \delta > 1,\ 0 < s < 1$.

(iii) $\omega : X \to X$ là lồi hoặc lõm và thuộc lớp C^1 trên X, $0 < \omega(x) < x$ và $\omega(0) \neq 0$ trên $X \setminus \{0\}$. Đặt $s = \omega'(x_0)$, theo (iii) ta có $0 \leq s \leq 1$.

Ta chứng minh được rằng $\lambda \in \mathbb{D}$ là nghiệm của (22) khi và chỉ khi $\varphi(x) = \lambda(x)/x,\ (\varphi(0) = \lambda'(0))$ là nghiệm liên tục của phương trình

$$\varphi(\omega(x)) = g(x)\varphi(x). \tag{23}$$

Định lý 12. Với các giả thiết (i) và (ii) và với quan hệ tiệm cận được thay thế bởi:

$$\omega'(x) = 1 - b(m+1)x^m + O(x^{m+\delta}), \ x \to 0, \tag{24}$$

trong đó b, m, δ là các hằng số dương thì phương trình (22) có một họ nghiệm liên tục duy nhất $\lambda : X \to \mathbb{R}$ sao cho:

$$\lambda(x) = x^{m+1}(c + O(x^\tau)), \ x \to 0, \ c \in \mathbb{R}, \tag{25}$$

trong đó $\tau = \min(m, \delta)$, các nghiệm này cho bởi công thức:

$$\lambda(x) = c \lim_{n\to\infty} [(\omega^n(x))^{m+1}/(\omega^n)'(x)]. \tag{26}$$

Chứng minh. Đặt

$$\lambda(x) = x^{m+1}\varphi(x), \tag{27}$$

với mỗi nghiệm $\lambda : X \to \mathbb{R}$ của phương trình (22) có các tính chất đã được nêu trong định lý sẽ có tương ứng một nghiệm liên tục $\varphi : X \to \mathbb{R}$ của phương trình (23) sao cho $\varphi(x) = c + O(x^\tau), \ x \to 0$, trong đó:

$$g(x) = x^{m+1}\omega'(x)(\omega(x))^{-m-1}, \ x \in X\backslash\{0\}, \ g(0) = 1$$

và ngược lại hai nghiệm được liên hệ với nhau theo (27).
Để giải phương trình (23) với g trên, ta chú ý rằng quan hệ (24) ngụ ý rằng

$$\omega(x) = x - bx^{m+1} + O(x^{m+1+\delta}). \tag{28}$$

Do đó, theo định nghĩa của g

$$g(x) = 1 + O(x^{m+\tau}), \ x \to 0,$$

phương trình (23) có một họ nghiệm liên tục duy nhất $\varphi : X \to \mathbb{R}$, được cho bởi công thức:

$$\varphi(x) = c. \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \left[g(\omega^i(x))\right]^{-1} = c. \lim_{n\to\infty} \left[x^{-m-1}(\omega^n(x))^{m+1}/(\omega^n)'(x)\right]$$

và chúng có tính chất $\varphi(x) = c + O(x^\tau), \ x \to 0$. Hàm λ xác định bởi (27) thoả mãn các điều kiện của định lý.

Xét phương trình Abel

$$\alpha(\omega(x)) = \alpha(x) + 1. \tag{29}$$

Rõ ràng phương trình (29) không thể có nghiệm xác định tại điểm cố định của ω, vì thế $0 \notin X$. Ta thay thế giả thiết (i) bằng giả thiết
(i') $X = (0, a], \ 0 < a \leq \infty$.
Ta sẽ chỉ ra rằng nếu (ii) được thoả mãn thì nghiệm của phương trình (29) có thể thu được qua định lý 3 với sự trợ giúp của nghiệm khả vi của phương trình Schröder.

Định lý 13. Với các giả thiết (i') và (ii) thì phương trình (29) có một họ nghiệm duy nhất $\alpha : X \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$\alpha(x) = \log x/\log s + \varphi(x),$$

trong đó $\lim_{n\to 0}\varphi(x)$ tồn tại và hữu hạn, các nghiệm này cho bởi công thức

$$\alpha(x) = \log f(x)/\log s + c,\ c \in \mathbb{R}, \tag{30}$$

với $f : X \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ là một nghiệm thuộc lớp C^1 của phương trình (6) trên $X \cup \{0\}$ sao cho $f'(0) = 1$.

Chứng minh. Ta có thể mở rộng ω lên $X \cup \{0\}$ bằng cách đặt $\omega(0) = 0$. Theo định lý 3 phương trình (6) có duy nhất một nghiệm thuộc lớp C^1 là $f : X \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $f'(0) = 1$. Dễ dàng thấy rằng α cho bởi công thức (30) với $c = 0$ có mọi tính chất mong muốn.

Bây giờ gọi $\tilde{\alpha} : X \to \mathbb{R}$ là một nghiệm khác của phương trình (29) thoả mãn $\tilde{\alpha}(x) = \dfrac{\log x}{\log s} + \tilde{\varphi}(x)$, ở đây $\tilde{\alpha}$ có giới hạn hữu hạn khi $x \to 0$ thì hàm $\omega(x) = \tilde{\alpha}(x) - \alpha(x) = \tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)$ thoả mãn phương trình $\omega(\omega(x)) = \omega(x)$ và có giới hạn hữu hạn tại 0 vì vậy $\omega = \text{const}$. Do đó, nghiệm α là duy nhất sai khác một hằng số.

Đạo hàm hai vế của (29) ta được:

$$\alpha'(\omega(x)).\omega'(x) = \alpha'(x).$$

Vì vậy phương trình Julia cũng có mối liên hệ với phương trình Abel. Trong trường hợp $s = 1$ ta có định lý sau.

Định lý 14. Giả sử (i') và (ii) được thoả mãn nhưng quan hệ tiệm cận được thay thế bởi (24) thì phương trình (29) có một họ nghiệm duy nhất $\alpha : X \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên X và thoả mãn các điều kiện

$$\alpha'(x) = x^{-m-1}\varphi(x), \tag{31}$$

ở đó $\lim_{n\to 0}\varphi(x)$ tồn tại hữu hạn. Các nghiệm này giảm nghiêm ngặt trên X và được cho bởi công thức

$$\alpha(x) = c + \lim_{n\to\infty}\frac{\omega^n(x) - \omega^n(x_0)}{\omega^{n+1}(x_0) - \omega^n(x_0)}, \tag{32}$$

ở đó $x_0 \in X$ là một điểm cố định tùy ý và c là một hằng số bất kỳ. Hơn nữa

$$\alpha'(x) = -b^{-1}x^{-m-1} + O(x^{-m-1+\tau}),\ x \to 0, \tag{33}$$

ở đó $\tau = \min(m, \delta)$.

Tiếp theo, xét lớp nghiệm giải tích của phương trình Abel.

Để ý rằng phương trình Schröder (11) không có các nghiệm thú vị trong trường hợp ứng với $s = \omega'(0) = 1$, nhưng phương trình Abel:

$$\alpha(\omega(x)) = \alpha(x) + 1 \tag{34}$$

lại có vai trò đặc biệt hữu ích trong trường hợp này. Ở đây, ta đề cập tới trường hợp khác khi $|s| \leq 1$. Ta bắt đầu với s không phải là căn của đơn vị và với các giả thiết sau:
(i) $X \subset \mathbb{C}$ là một lân cận của gốc toạ độ.
(ii) $\omega : X \to \mathbb{C}$ là một hàm giải tích, $\omega(0) = 0$, $s = \omega'(0)$.
Trước hết các công thức của định lý 15 và 16 cho ta các nghiệm α của (34) là đa trị. Phương trình (34) được hiểu là với mọi x sao cho x và $\omega(x)$ cùng thuộc miền xác định của α và với mọi giá trị của α tại $\omega(x)$, một nhánh của α có thể được chọn sao cho (34) đúng.

Định lý 15. Với các giả thiết (i), (ii) và giả sử rằng hoặc $0 < |s| < 1$ hoặc $s \in \mathbb{P}$, ở đó $\mathbb{P}$ là tập Siegel thì phương trình (34) có một họ nghiệm duy nhất α xác định trên một lân cận của gốc toạ độ sao cho:

$$\alpha(x) = \log x / \log s + \varphi(x), \tag{35}$$

trong đó là một hàm giải tích trên một lân cận của gốc toạ độ. Các nghiệm này cũng được cho bởi:

$$\alpha(x) = \log f(x) / \log s, \tag{36}$$

trong đó f là một nghiệm giải tích địa phương không tầm thường của phương trình *schroder* (11) và *logs* là một giá trị tùy ý của logarit tại s.
Chứng minh. Đặt $\psi(x) = \varphi(x). \log s$, nếu α có dạng (35) và thoả mãn phương trình (34) trong một lân cận của $x = 0$ thì hàm f cho bởi:

$$f(x) = \exp[\alpha(x). \log s] = x. \exp(\psi(x))$$

là một nghiệm giải tích địa phương của phương trình (11). Đảo lại, nếu f là một nghiệm như mong đợi của (11) thì theo định lý 9 ta có $f'(0) = 0$ và vì vậy α được cho bởi (36) có tính chất (35) và thoả mãn (34). Theo định lý 9 thì nghiệm giải tích địa phương f của (11) được xác định duy nhất sai khác một hằng số nhân, vậy α sai khác một hằng số cộng.

Lập luận tương tự với định lý 8 ta thu được định lý sau.

Định lý 16. Nếu các giả thiết (i), (ii) được thoả mãn và giả sử $s \neq 1$ là một căn bậc p của đơn vị thì phương trình (34) có các nghiệm α dạng (35) với φ là một hàm giải tích trong một lân cận của gốc toạ độ khi và chỉ khi $\omega^p = id$, nghiệm này không duy nhất.

Nhận xét 5. Chú ý rằng không nghiệm đơn trị nào của (34) tồn tại trong một miền chứa điểm cố định của ω có bậc bất kỳ. Chẳng hạn, phương trình $\alpha(-x) = \alpha(x) + 1$ không thể có nghiệm đơn trị, bằng cách áp dụng 2 lần phương trình này ta được $\alpha(x) = \alpha(-x) + 2$. Tuy nhiên, cả hai phương trình này đều có nghiệm đa trị $\alpha(x) = (\pi i)^{-1} \log x$.

Xét phương trình Abel với nghiệm phức:

$$\alpha(\omega(x)) = \alpha(x) + 1, \tag{37}$$

trong đó $s = \omega'(0) = 1$.

Định lý 17. Cho ω giải tích trong một lân cận của gốc toạ độ. Khi đó, phương trình (37) có nghiệm α xác định trong một lân cận của gốc toạ độ sao cho:

$$\alpha(x) = c_0.\log x + \sum_{i=1}^{m-1} c_i.x^{-i} + \varphi(x), \quad c_0, c_1, \ldots, c_{m-1} \in \mathbb{C} \tag{38}$$

với φ là một hàm giải tích trong một lân cận của gốc toạ độ, α được xác định duy nhất sai khác một hằng số dương và được cho bởi công thức:

$$\alpha(x) = c + \int_{x_0}^{x} \left[\int_{x_0}^{\omega(x_0)} \frac{dt}{\omega_*(t)} \right]^{-1} \frac{dt}{\omega_*(t)}, \tag{39}$$

trong đó c là một hằng số bất kỳ, x_0 là một điểm tùy ý cố định trong một lân cận V của gốc toạ độ, tích phân được lấy theo một đường cong tùy ý nối x_0 và $\omega(x_0)$, x_0 và x.

3 Một số áp dụng liên quan

Trong mục này ta khảo sát các ứng dụng của phương trình Schröder:

$$f(\omega(x)) = s.f(x) \tag{40}$$

phương trình Abel:

$$\alpha(\omega(x)) = \alpha(x) + 1. \tag{41}$$

Ta bắt đầu bằng việc giới thiệu về nghiệm cơ bản của phương trình (40) và (41) và về thuật toán của Lévy và Keonigs. Tiếp theo, xem xét quan hệ giữa hệ tiền Schröder:

$$f[\omega(x)]^n = f\left(\omega^n(x)\right)[f(x)]^{n-1}; \quad n \in \mathbb{N}$$

và phương trình Schröder (40).

Các phương trình Schröder và Abel xác định lớp các hàm liên kết. Các hệ dạng (41) cung cấp các phép biến đổi của các phương trình vi phân với đối số lệch (mục 4) và các hệ dạng (40) được dùng như một công cụ để nghiên cứu đặc tính của các chuẩn trong một vài không gian hàm và dãy. Ở đây ta sẽ chỉ ra các vấn đề liên quan và áp dụng của phương trình (40) và (41) đã được trình bày ở các mục trên.

Xét lớp các nghiệm cơ sở.

Trong hầu hết các ứng dụng của phương trình Schröder và Abel đều xuất hiện nghiệm duy nhất được xác định bằng phương pháp xấp xỉ liên tiếp của hàm ω.
Theo G.Szekeres [1] ta phân biệt một loại nghiệm đặc biệt được gọi là nghiệm cơ bản (cơ sở) của phương trình Schröder và Abel.
Lấy $X = [0; a]$, $0 < a \leq \infty$ và $\omega : X \to X$ là một hàm liên tục, đồng biến, $0 < \omega(x) < x$ trong $X \setminus \{0\}$.

Định nghĩa 1. Giả sử rằng giới hạn

$$s := \lim_{n\to\infty} \frac{\omega^{n+1}(x)}{\omega^n(x)}, \ \ x \in X\setminus\{0\}$$

tồn tại và không phụ thuộc vào x. Lấy $x_0 \in X\setminus\{0\}$, nếu giới hạn

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\omega^n(x)}{\omega^n(x_0)}, \ \ x \in X \tag{42}$$

tồn tại, dương và hữu hạn trong $X\setminus\{0\}$ thì nó thỏa mãn:

$$f(\omega(x)) = s.f(x) \tag{43}$$

và nó được gọi là nghiệm cơ bản của phương trình Schröder (43).

Nếu ta thêm $x_1 \in X\setminus\{0\}$ và thay vào vị trí của x_0 trong (42) thì sẽ thu được giới hạn khác sai khác một hằng số nhân. Vì vậy nghiệm cơ bản của phương trình Schröder là duy nhất sai khác một hằng số.
Trong trường hợp tổng quát, các nghiệm cơ bản được xem xét gần gốc toạ độ hơn các nghiệm khác của (43). Các điều kiện cho sự tồn tại giới hạn (42) được bao gồm trong định lý 1; 2.

Nhận xét 6. Nếu tồn tại giới hạn

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} s^{-n}\omega^n(x), \ \ x \in X \tag{44}$$

thì giới hạn (42) tồn tại. Điều ngược lại có thể không đúng.

E. Seneta [5] đã chứng minh được rằng điều kiện tồn tại của $\widetilde{f}$, $0 < \widetilde{f} < \infty$ là sự hội tụ của tích phân:

$$\int_0^\delta (\omega(x) - sx)\, x^{-2} dx$$

với $\delta \in X\setminus\{0\}$. Công thức (44) được gọi là thuật toán Koenigs.

Bây giờ, cho $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy các số thực tùy ý mà

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_n}\left(\omega^{n+1}(x) - \omega^n(x)\right) = 1, \ \ x \in X\setminus\{0\}. \tag{45}$$

Định nghĩa 2. *Cho dãy (d_n) có tính chất (45), nếu tồn tại giới hạn*

$$\alpha(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_n}\left(\omega^n(x) - \omega^n(x_0)\right), \ \ x \in X\setminus\{0\}, \tag{46}$$

với $x_0 \in X\setminus\{0\}$ thì nó thỏa mãn

$$\alpha(\omega(x)) = \alpha(x) + 1 \tag{47}$$

và nó được gọi là nghiệm cơ bản của phương trình Abel (47).

Dễ dàng chỉ ra rằng giới hạn (46) không phụ thuộc vào việc chọn dãy (d_n) thỏa mãn (45) và nếu thay thế x_0 trong (46) bởi $x_1 \in X\setminus\{0\}$ ta thu được một giới hạn sai khác một hằng số cộng. Vì vậy, nghiệm cơ bản của phương trình Abel xác định sai khác một hằng số cộng.

Nhận xét 7. Nếu (45) đúng với $d_n = \omega^{n+1}(x_0) - \omega^n(x_0)$, ở đó $x_0 \in X\setminus\{0\}$ và nếu tồn tại giới hạn:

$$\widetilde{\alpha}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\omega^n(x) - \omega^n(x_0)}{\omega^{n+1}(x_0) - \omega^n(x_0)}, \quad x \in X\setminus\{0\} \tag{48}$$

thì nó là nghiệm cơ bản của (47).

Công thức (48) được gọi là thuật toán Lévy. Định lý 11 và 14 đưa ra các điều kiện để thuật toán Lévy có thể thực hiện được.

4 Hệ Abel và các phương trình vi phân có lệch

Ta xét phương trình vi phân bậc một với lệch $\omega(x)$ là:

$$A(\omega) = \mathrm{A}\left(x, y(x), \mathrm{y}\left(\omega(x)\right), y'(x), y'\left(\omega(x)\right)\right) = 0$$

bằng phép đổi biến $x \to t = \varphi(x)$ phương trình $A(\omega) = 0$ chuyển sang dạng khác với lệch $g(t)$, với $g = \varphi \circ \omega \circ \varphi^{-1}$. Theo cách này, ta dẫn đến phương trình liên hợp, hơn nữa φ là hàm khả nghịch và đủ trơn. Nếu ta muốn có một lệch hằng $g(t) = t + c$ thì sẽ có phương trình Abel dạng

$$\alpha\left(\omega(x)\right) = \alpha(x) + c.$$

Để tìm một nghiệm α thích hợp, ta sẽ áp dụng lý thuyết về các nghiệm khả vi.
Bây giờ ta xét phương trình bậc n với k lệch $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_k(x)$ là $A_n(\omega_1, \ldots, \omega_k) = 0$. Việc tồn tại một phép biến đổi α biến phương trình này thành phương trình dạng $B_n(g_1, \ldots, g_n) = 0$ với các lệch hằng số:

$$g_i(t) = t + c_i, \quad i = 1, \ldots, k; \quad c_i \neq 0.$$

tương đương với việc tồn tại một nghiệm chung α của hệ các phương trình Abel đồng thời:

$$\alpha\left(\omega_i(x)\right) = \alpha(x) + c_i, \quad i = 1, \ldots, k, \quad c_i \neq 0 \tag{49}$$

Hệ (49) sẽ được giải dưới các giả thiết sau:
(i) $X \subset \mathbb{R}$ là một tập mở bị chặn hoặc một khoảng vô hạn.
(ii) $\omega_i : X \to X$ thuộc lớp C^n trên X, $\omega'(x) > 0$, $\forall x \in X$, $\omega_i(x) \neq x$ trên X, $\omega_i(X) = X$ với $i = 1, 2, \ldots, k$, $n \in \mathbb{N}$.

Ngoài ra, ta giả thiết thêm rằng
(iii) Tồn tại một nghiệm chung $\alpha : X \to \mathbb{R}$ của (49) thuộc lớp C^n trên X và $\alpha'(x) > 0$ trên X.
Từ (iii) kéo theo rằng $\alpha(X) = R$, lấy $x_0 \in X$, $j \in \{1, \ldots, k\}$,
ta tính được

$$\lim_{m\to\pm\infty} \alpha\left(\omega_j^m(x0)\right) = \lim_{m\to\pm\infty} \left(\alpha(x_0) + mc_j\right) = \pm\infty.$$

Nhận xét rằng α là hàm liên tục và đồng biến trên X.
Các phương trình (49) cho thấy rằng các hàm ω_i có thể được nhúng vào nhóm các phép biến đổi một tham số cho bởi công thức $\alpha^{-1}\left(\alpha(x) + c\right)$, $c \in \mathbb{R}$. Mọi hợp hữu hạn của ω_i và các nghịch đảo của nó ω_i^{-1} cũng thuộc nhóm này. Ta ký hiệu tập lớp các hợp này là

$$\omega = \{\omega_1^{s_1} \circ \omega_2^{s_2} \circ \cdots \circ \omega_k^{s_k} : s_i \in Z, \ i = 1, \ldots, k\}$$

Dễ dàng chứng minh được các tính chất sau của nhóm ω.

Bổ đề 2. Giả sử các giả thiết (i) – (iii) được thỏa mãn khi đó:
(a) Hai phần tử tùy ý của ω là giao hoán và ω là một nhóm.
(b) Hai hàm tùy ý của ω mà bằng nhau tại một điểm của X thì đồng nhất trùng nhau.

Một câu hỏi đặt ra là tập hợp các điểm nằm trên đồ thị của hàm thuộc ω là trù mật trong X^2 hay không. Đặt

$$G = \{(x,y) \in x^2 : \text{tồn tại } \omega \in \omega \text{ sao cho } \omega(x) = y\}.$$

Tính chất 1. Giả sử rằng $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ và $c_i \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $i = 1, \ldots, k$. Tập hợp

$$M = \{x \in \mathbb{R} : x = s_1c_1 + \cdots + s_kc_k,\ s_i \in Z\} \tag{50}$$

trù mật trong $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi có ít nhất một thương c_i/c_j là số vô tỷ.

Bổ đề 3. Nếu các giả thiết (i) – (iii) được thỏa mãn thì:
(a) Tập G trù mật trong X^2 khi và chỉ khi có ít nhất một cặp (i, j) với $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ sao cho thương c_i/c_j là số vô tỷ.
(b) Nếu G không trù mật trong X^2 thì có một hàm $g : X \to X$ thuộc lớp C^n trên X sao cho $g'(x) > 0$, $g(x) > x$ trên X và ω_i là các xấp xỉ liên tiếp của g, $\omega_i = g^{m_i}$, $m_i \in Z$, $i = 1, \ldots, k$.

Bổ đề 4. Giả sử (i) – (iii) đúng. Khi đó
(a) Hàm $H : G \to \mathbb{R}$ là dương trên G và thỏa mãn phương trình

$$H(x,y)H(y,z) = H(x,z) \tag{51}$$

với (x, y) và (y, z) thuộc G.
(b) Tồn tại một mở rộng H^* của H lên X^2 là hàm dương, thuộc lớp C^{n-1} và thỏa mãn (51) trên X^2. Hơn nữa, H có mở rộng duy nhất với điều kiện là G trù mật trong X^2.

Xét hệ các phương trình Abel đồng thời.

Định lý 18. Nếu các giả thiết (i), (ii) được thỏa mãn. Trong hai trường hợp sau sẽ tồn tại các hằng số $c_i \neq 0, i = 1, \ldots, k$ sao cho hệ (49) có nghiệm $\alpha : X \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^n trên X và thỏa mãn $\alpha'(x) > 0$ trên X. (tức là khẳng định (iii) đúng).
(a) Tồn tại hàm $g : X \to X$ thuộc lớp C^n trên X, thỏa mãn g'(x) > 0, g(x) > x trên X và có các số nguyên $m_i \neq 0$ sao cho $\omega_i = g^{m_i}$, $i = 1, \ldots, k$.
(b) Tập G trù mật trong x^2, hàm $H : G \to \mathbb{R}$ xác định tốt và có một mở rộng $H^* : x^2 \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^{n-1} trên x^2 đồng thời thỏa mãn phương trình (51) trong x^2.

Nhận xét 8. Định lý 18 bao gồm các điều kiện để một phương trình vi phân có lệch với lệch biến có thể biến đổi về dạng khác với lệch hằng.

Phương pháp để chuyển các phương trình vi phân có lệch về dạng đơn giản hơn được đề xuất bởi F. Newman [9], [10]. Phương pháp của ông là tìm nghiệm trơn của các phương trình Abel đồng thời nó dựa vào các kết quả của O.Boruvka liên quan đến nhóm các phép biến đổi một tham số. Để tìm thêm các kết quả về các phương trình hàm được đề cập trong mục này xem ở Bodewadt [1] và Barvínek [1] hoặc Choczewski [2].

5 Hệ Schröder và đặc tính của chuẩn

Đặc tính của chuẩn theo các phương trình hàm và các kết quả trong mục này được trình bày theo J. Matkowski [16].

5.1 Đặc tính của các chuẩn

Xét không gian l^p gồm các dãy số thực hoặc phức khả tổng bậc p ($p \geq 1$):

$$l^p = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in K, \ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$$

Không gian này cùng với chuẩn:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

là một không gian Banach. Ta xét $\varphi(t) = c.t^p$ thì công thức trên trở thành

$$\|x\|_\varphi = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(|x_i|) \right) \tag{52}$$

Một câu hỏi đặt ra là tồn tại hay không hàm φ đồng biến từ $\mathbb{R}^+$ vào chính nó, $\varphi(0) = 0$, φ không phải hàm lũy thừa sao cho (52) xác định một chuẩn trong không gian l^p bao gồm các dãy thực hoặc phức x mà φ - khả tổng, tức là

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi(|x_i|) < \infty.$$

Câu trả lời là không. Sử dụng tính chất tuyến tính của chuẩn cho (52) ta sẽ quy bài toán về việc tìm nghiệm chung đồng biến của hai phương trình Schröder. Ta tiến hành như sau:
Lấy dãy đầu tiên là $x = (1, 1, 0, 0, \dots)$ và tiếp theo $x = (1, 1, 1, 0, 0, \dots)$, trong cả hai trường hợp $x_i = 0, \ \forall i \geq 4$. Từ $\|tx\|_\varphi = t\|x\|_\varphi$ với $t > 0$ ta thu được từ (52):

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(2\varphi(t)) &= t\alpha \\ \varphi^{-1}(3\varphi(t)) &= t\beta \end{aligned}$$

Trong đó $\alpha = \varphi^{-1}(2\varphi(1))$, $\beta = \varphi^{-1}(3\varphi(1))$, vì vậy φ^{-1} phải thỏa mãn hệ phương trình Schröder đồng thời trên $(0, \infty)$.

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{-1}(2t) = \alpha\varphi^{-1}(t) \\ \varphi^{-1}(3t) = \beta\varphi^{-1}(t) \end{aligned} \right\} \tag{53}$$

ta sẽ thấy rằng hệ (53) chỉ có nghiệm là các hàm lũy thừa như trong câu hỏi. Theo cách này ta sẽ thu được đặc tính của chuẩn trên l^p.

Ta giải hệ các phương trình Schröder đồng thời.

$$\left.\begin{array}{l} f(at) = \alpha.f(t) \\ f(bt) = \beta.f(t) \end{array}\right\} \quad t > 0 \tag{54}$$

trong đó a, b, α, β là các hằng số thực dương, $a \neq 1, b \neq 1$.

Định lý 19. (a) Cho $\log b/\log a$ là số vô tỉ. Nếu hàm đơn điệu nghiêm ngặt $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ (54) thì có một $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sao cho

$$f(t) = ct^p \text{ với t} > 0\ , \tag{55}$$

ở đó

$$p = \log\alpha/\log a, \tag{56}$$

hơn nữa

$$\frac{\log\alpha}{\log a} = \frac{\log\beta}{\log b} \tag{57}$$

(b) Nếu (57) đúng thì các hàm (55) với p đã cho theo (56) và tùy ý $c \in \mathbb{R}$ sẽ thỏa mãn hệ (54) (và đơn điệu nghiêm ngặt khi $c \neq 0$ và $p \neq 0$).
Bây giờ ta đã sẵn sàng phát biểu định lý chính.

Định lý 20. Giả sử rằng $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm đồng biến và $\varphi(0) = 0$ Để $\left(l_\varphi, \|\cdot\|_\varphi\right)$ là một không gian chuẩn (với chuẩn (52)) thì điều kiện cần là có c > 0 và $p \geq 0$ sao cho: $\varphi(t) = c.t^p$ với $t \geq 0$.

5.2 Các phương trình vi phân có lệch

Để minh họa cho quá trình quy các phương trình vi phân có lệch ta đưa ra ví dụ sau (cái này theo F.Neuman [9]).

Ví dụ 1. Phương trình vi phân:

$$y'(x) = ky(x^p),\ \ x \in (1, \infty),$$

trong đó $k \neq 0$, $p \in (0, 1)$ được biến đổi thành $z'(t) = g(t).z(t+1)$ với phép đổi biến $t = \alpha(x)$, $y(x) = z(t) = (z \circ \alpha)(x)$, ở đó $\alpha(x) = -(\log\log x)/\log p$ là một nghiệm của phương trình.

$$\alpha(x^p) = \alpha(x) + 1,$$

ở đây $g(t) = -k.\log p.\exp\left(\exp(-t\log p) - t\log p\right)$.

Ví dụ 2.
a. Phương trình vi phân

$$y'(x) = y(x^{1/2}) + y(x^4), x \in X = (0, \infty)$$

trở thành một phương trình với lệch hằng $t-1, t+2$ bằng phép đổi biến $t = \alpha(x)$. Theo định lý 18(a) với $\omega_1(x) = x^{1/2}$ và $\omega_2(x) = x^4$ ta có $\omega_1 = g^{-1}$ và $\omega_2 = g^2$ ở đó $g : X \to$

X, $g(x) = x^2$. Hàm α là nghiệm của phương trình $\alpha(x^{1/2}) = \alpha(x) + 1$, thuộc lớp C^2 trên X, $\alpha'(x) > 0$.
b. Phương trình vi phân

$$y'(x) = y(x^{1/2}) + y(x^3), \ \ x \in X$$

có thể đưa về phương trình với lệch hằng $tK_1 \log 2$, $t = K_1 \log 3$, $K_1 > 0$. Ở đây tập $G = \{(x, x^a) : a = 2^p 3^q, \ p, q \in Z, \ x \in X\}$ trù mật trong x^2. Hàm H được cho bởi $H(x,y) = H(x, x^a) = (x^a)' = a.x^{a-1}$ trên G bao gồm một mở rộng trơn H^* lên x^2 được xác định bởi $H^*(x,y) = (y \log y) / (x \log x)$ với $(x,y) \in x^2$. Hợp nhất H* với biến đầu tiên ta thu được $\alpha(x) = K_1 \log\log x + K_2$, $K_1 > 0$, theo định lý 18(b) đây là phép biến đổi mong muốn.

Khẳng định của định lý 20 cũng đúng cho không gian L_φ gồm các hàm φ-khả tích $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ với chuẩn:

$$\|x\|_\varphi = \varphi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(|x(u)|)\, du\right).$$

Vì vậy, không gian L_φ thực chất là một không gian L^p với p− chuẩn thông thường. Hơn nữa, để $\| \ . \ \|$ trong $\mathbb{R}^N$; $N \geq 4$ được cho bởi:

$$\|x\| = \psi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} \varphi(|x_i|)\right)$$

Với $\varphi, \psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ψ là hàm đồng biến là một chuẩn điều kiện cần là $\varphi(t) = c_1.t^p$, $\psi(t) = c_2 t^p$, $c_1, c_2 > 0, p > 1$

5.3 Phương trình Schröder, Abel và phương trình vi phân

Các phương trình Schröder và Abel được liên kết với các phương trình vi phân

$$x(n+1) = \omega_n(x(n)), \ \ x(0) = x$$

như đã được xét bởi P.Diamond [3].
Dưới đây ta sẽ dùng dãy các xấp xỉ liên tiếp tổng quát với các số hạng

$$\omega_0(x) = x, \ \ \omega_{n+1}(x) = \omega_n(\omega_{n+1}(x)), \ \ n \in \mathbb{N}, \tag{58}$$

trong đó $\omega_{n+1}(x)$ thuộc miền xác định của ω_n. Đặt $U_\delta = \{x \in C : |x| < \delta\}$, $\delta > 0$.

Mệnh đề 1. Cho $\omega_n : U_\delta \to \mathbb{C}$ là các hàm giải tích trong U_δ, $|\omega_n(x)| < |x|$, $\forall x \in U_\delta \setminus \{0\}$ với các khai triển:

$$\omega_n(x) = s(n).x + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(n).x^i$$

Và $0 < p \leq |s(n)| \leq r < 1$, $n \in \mathbb{N}$, $p \leq r$. Giả sử rằng dãy $\{\omega_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ đều trên U_δ tới hàm ω thì tồn tại giới hạn:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(x) \prod_{j=1}^{n} s(j)^{-1} \tag{59}$$

là hội tụ đều trên $U_\eta \subset U_\delta$ và f là một nghiệm giải tích của phương trình Schröder $f(\omega(x)) = s.f(x)$ trên U_η ở đó $s = \omega'(0) = \lim_{n\to\infty} s(n)$.

Phương trình Schröder $f(\omega(x)) = \frac{1}{2}f(x)$, $\omega(x) = \frac{1}{2}(x + x^2)$, $x \in X = [0,1]$ chứa nghiệm cơ bản$f(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n\omega^n(x)$, $x \in X$ là đồng biến trên X. Tương tự, hàm $\pi(y) = \lim_{n\to\infty} \omega^n \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n y\right)$ xác định và giảm nghiêm ngặt trên $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn phương trình Poincaré $\pi\left(\frac{3}{2}y\right) = \omega(\pi(y))$, $y \in \mathbb{R}^+$. Cả hai hàm này có thể được dùng để xác định nửa nhóm các xấp xỉ liên tục (xem mục 1.7) chứa nửa nhóm rời rạc $\{\omega^n, n \in \mathbb{N}\}$, tức là $\omega_1^t = f^{-1} \circ (2^{-t}f)$ và $\omega_2^t = \pi \circ \left(\left(\frac{3}{2}\right)^t \pi^{-1}\right)$, $t \in \mathbb{R}^+$ Điều này gắn với bài toán đã được xem xét trong Karlin – McGregor [1].

Hai nửa nhóm sẽ đồng nhất trong (0, 1) khi và chỉ khi hàm

$$K(y) = y^p f(\pi(y)), \quad p = \log 2/\log(3/2) \tag{60}$$

là hằng số. Tuy nhiên, mặc dù $K(y) = 1.213205784311\ldots$ với mọi $y > 0$ nhưng giá trị của $K(y)$ sẽ thay đổi với y từ số thập phân thứ 13 trở đi.

Các tính chất của K trong trường hợp ω phức tổng quát đã được nghiên cứu triệt để bởi S. Dubuc [2] người đã gọi K là hàm Karlin – McGregor và đã giải thích được hiện tượng thay đổi nhỏ này của hàm (60).

5.4 Các phương trình Abel đồng thời

M.C.Zdun [19] đã xem xét các phương trình Abel đồng thời

$$\begin{cases} \varphi(\omega(x)) = \varphi(x) + 1 \\ \varphi(g(x)) = \varphi(x) + s \end{cases} \tag{61}$$

với $x \in X = (0, a), 0 < a \leq \infty$ trong trường hợp sau
(i) ω và g là các đồng phôi giao hoán từ X vào X và $\omega^m(x) \neq g^n(x)$ trên X, ở đó $(m, n) \in Z^2 \backslash \{(0,0)\}$.
Cho L là tập các điểm giới hạn của $C(x) = \{\omega^m \circ g^n(x) : \ m, n \in Z\}$ với $x \in X$. Trong Zdun[19] đã chứng minh được rằng L đúng là không phụ thuộc vào X và hoặc L là tập không đâu trù mật hoàn toàn hoặc $L = [0, \ a]$.

Mệnh đề 2. *Giả sử (i) đúng, khi đó có chỉ một* $s \in \mathbb{R}$ *sao cho hệ* (61) *có một nghiệm liên tục* $\varphi : X \to \mathbb{R}$, *s này là vô tỷ thì nghiệm liên tục của* (61) *là duy nhất sai khác một hằng số cộng, là đơn điệu và ánh xạ* $L \cap X$ *vào R. Hơn nữa, nó khả nghịch khi và chỉ khi* $L = [0, a]$.

Tài liệu

[1] *PL. Kannappan (2008), Functional Equations and Inequalities with Applications, Springer.*

[2] *D. H. Hyper, G. Isac and Th. M. Russias, Stability of Functional Equations in Several Variables, Birkhauser, Boston (1998).*

[3] *L. Szekelyhidi (2000), Ulam's problem, Hyper' s solutions- And to where they led, in Th. M. Russias- Functional Equations and Inequalities, Vol.518, Kluwer, Dordrecht, 259-285 (2000).*

[4] *R.Ger, A survey of recent results on stability of functional equations, in Proceedings of the 4th International Conference on Functions and Inequalities, Pedagogical Universityin Cracow, 5-36 (1994).*

[5] *G. Polya and G. Szego, (1972), Problems and theorems in analysis I, in Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 193, Springer- Verlag, Berlin, 1972.*

[6] *Th. M. Russias (1989), On the stability of the linear mapping in Banach spaces, Proc.Am. Math, Soc, 72, 297-300 (1978)*

[7] *G. Gaudet and M. Moreaux, Price versus quantity rules in dynamics competition, The case of nonrenewable natural resouces, Int. Econ. Rev, 31, 639-650 (1990).*

[8] *Z. Gajda, On stability of additive mappings, Int. J. Math. Math. Sci, 14, 431-434 (1991). Zbl: 721.39006*

[9] *Th. M. Russias, On a modified Hyers- Ulam sequence, J. Math, Anal, Appl, 154, 106-113(1991)*

[10] *Th. M. Rassias and P. Semrl, On the Hyper-Ulam stability of linear mappings, J. Math Anal. App, 173, 325-338 (1993).*

[11] *J. Ratz, In General Inequalities 2, Internat, Schriftenreihe Numer, Math, Vol. 47. Proceedings on the 18th ISFE, University of Waterloo, Waterloo, 22-23(1980)*

[12] *J. A Baker, The stability of the cosine equation, Proc. Am. Math. Soc. 80, 411-416 (1980) (1981)*

Ứng dụng lý thuyết đồ thị giải toán phổ thông

Đặng Huy Ruận, ĐHKHTN Hà Nội

MỞ ĐẦU

Trong nhiều tình huống, do thói quen người ta thường vẽ lên giấy những điểm biểu thị cho các cá thể, các khu dân cư, các đơn vị hành chính, các nút giao thông, các hoá chất,... và nối các điểm đó với nhau bằng những nét hoặc những mũi tên tượng trưng cho mối liên hệ nào đó. Các sơ đồ này dùng ở khắp nơi với các tên gọi khác nhau. Trong tâm lý học gọi nó là xã hội đồ. Trong kinh tế gọi là sơ đồ tổ chức. Trong giao thông vận tải gọi là mạng giao thông... Chính D.Konig là người đầu tiên đề nghị gọi các sơ đồ như trên là "đồ thị", đồng thời đề nghị nghiên cứu một cách có hệ thống các tính chất của nó.

Lý thuyết đồ thị là ngành toán học hiện đại, còn rất trẻ với lịch sử phát triển mới hơn một thế kỷ và có ứng dụng quan trọng vào nhiều ngành khoa học, kỹ thuật hiện đại: tin học, công nghệ thông tin, vật lý, hoá học, sinh học,....

Trong lý thuyết đồ thị nhiều vấn đề đặt ra khá đơn giản, nhưng cách dẫn dắt để giải quyết lại rất độc đáo và sâu sắc. Thông qua đồ thị có thể giới thiệu cách giải quyết nhiều bài toán có tính chất giải trí, song lại bao hàm ý nghĩa khoa học và thực tế sâu sắc. Bởi vậy, việc trang bị kiến thức về đồ thị và phương pháp vận dụng đồ thị để giải toán là rất cần thiết đối với các thầy cô giáo phổ thông.

Nhằm phục vụ việc trang bị kiến thức về đồ thị cho các thầy cô giáo đang giảng dạy ở các trường trung học phổ thông, đặc biệt là phương pháp vận dụng đồ thị để giải toán bài viết chỉ trình bày những phần kiến thức về đồ thị liên quan nhiều đến toán phổ thông. Sau mỗi phần trình bày tóm tắt kiến thức đều có các bài tập để vận dụng giải toán.

§1. Các khái niệm cơ bản.

I. Định nghĩa đồ thị.

Tập hợp $X \neq \emptyset$ các đối tượng tuỳ ý và bộ E các cặp được sắp thứ tự và không được sắp thứ tự các phần tử của X được gọi là một đồ thị, đồng thời được ký hiệu hoặc bằng G(X, E) hoặc bằng G = (X, E) hoặc bằng G(X).

Các phần tử của X được gọi là các đỉnh. Cặp đỉnh không sắp thứ tự a = (x, y) được gọi là cạnh hay cạnh vô hướng, còn x, y được gọi là các đỉnh đầu của cạnh a; cặp đỉnh được sắp thứ tự b = (u, v) được gọi là cạnh có hướng hay cung. Đỉnh u được gọi là đỉnh đầu, còn đỉnh v là đỉnh cuối của cung b. Người ta còn nói rằng: cung b đi từ đỉnh u đến đỉnh v.

Đồ thị chỉ chứa các cạnh được gọi là đồ thị vô hướng, còn đồ thị chỉ chứa các cung được gọi là đồ thị có hướng. Nếu đồ thị chứa cả cạnh lẫn cung, thì nó được gọi là đồ thị hỗn hợp hay đồ thị hỗn tạp.

Một cặp đỉnh có thể được nối với nhau bằng hai hoặc nhiều hơn hai cạnh (hai hoặc nhiều hơn hai cung cùng một hướng). Các cạnh (cung) này được gọi là các cạnh (cung) bội.

Một cạnh (hay một cung) có thể bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh. Cạnh (cung) loại này được gọi là khuyên hay nút (có hướng).

Cặp đỉnh x, y được gọi là hai đỉnh kề nhau, nếu $x \neq y$ và là hai đầu của cùng một cạnh hay một cung.

Đối với mỗi đỉnh x dùng D(x) để ký hiệu tập đỉnh, mà mỗi đỉnh này được nối với x bằng ít nhất một cạnh. $D^{+}(x)$ để chỉ tập đỉnh, mà mỗi đỉnh này từ x có cung đi tới. $D^{-}(x)$ để chỉ tập đỉnh, mà mỗi đỉnh này có cung đi tới x.

Hai cạnh (cung) a, b được gọi là kề nhau, nếu:

1. Chúng khác nhau.
2. Chúng có đỉnh chung (nếu a, b là cung thì không phụ thuộc vào đỉnh chung đó là đỉnh đầu hay đỉnh cuối của cung a, đỉnh đầu hay đỉnh cuối của cung b)

*Ví dụ 1.1.*Cho đồ thị hỗn hợp có khuyên G = (X, E) với tập đỉnh:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\},$$

Tập cạnh và cung:

$$\begin{aligned} E &= \{(x_1,x_2),\ (x_2,x_3),\ (x_4,x_6),\ (x_5,x_6),\ (x_7,x_7),\ (x_1,x_8),\ (x_5,x_5)\} \\ &= \{\quad a_1, \qquad a_2, \qquad a_3, \qquad a_4, \qquad a_5, \qquad b_1, \qquad b_2 \quad\} \end{aligned}$$

Trong đó a_1, a_2, a_3, a_4 - các cạnh, b_1 – cung, a_5 – khuyên vô hướng còn b_2 là khuyên có hướng.

II. Biểu diễn đồ thị bằng hình học.

Đồ thị có nhiều cách biểu diễn, nhưng trong phần này chỉ trình bày cách biểu diễn bằng hình học.

Giả sử có đồ thị G = (X, E)

Để có dạng biểu diễn hình học của G ta cần biểu diễn đỉnh và cạnh.

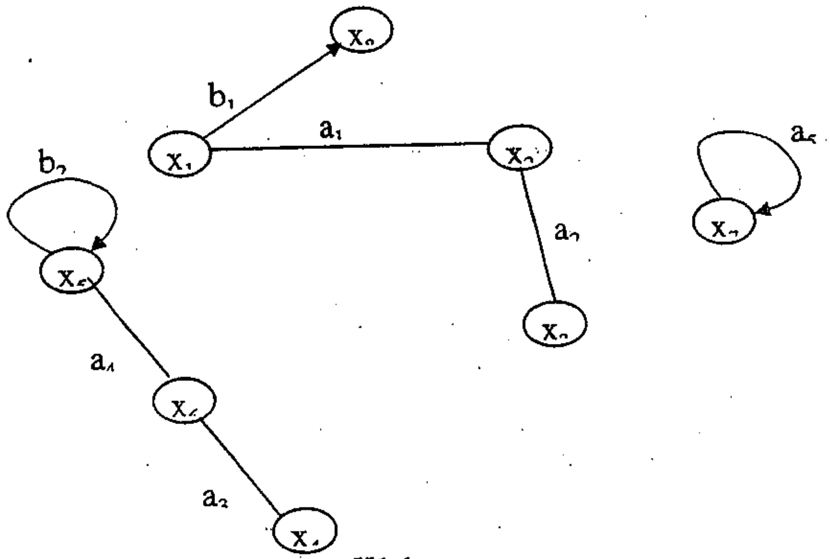
Biểu diễn đỉnh: Lấy các điểm trên mặt phẳng hay trong không gian tương ứng với các phần tử của tập X và dùng ngay ký hiệu các phần tử này để ghi trên các điểm tương ứng.

Biểu diễn cạnh: Nếu cạnh a với hai đỉnh đầu là x, y thì nó được biểu diễn bằng một đoạn thẳng hay một đoạn cong nối giữa hai điểm x, y và không đi qua các điểm tương ứng chung gian khác.

Biểu diễn cung: Cung b có đỉnh đầu là u, đỉnh cuối là v, thì nó được biểu diễn bằng một đoạn thẳng hay một đoạn cong được định hướng từ u sang v và không đi qua các điểm tương ứng chung gian khác.

Hình nhận được gọi là dạng biểu diễn hình học của đồ thị G = (X, E). Đôi khi người ta cũng gọi dạng biểu diễn hình học là đồ thị.

Ví dụ 1.2 .Dạng biểu diễn hình học của đồ thị G = (X, E) cho trong ví dụ 1.1.



H1.1

III. Một số dạng đồ thị đặc biệt.

Trong những trường hợp không cần phân biệt cạnh và cung ta quy ước dùng cạnh thay cho cả cung.

Đồ thị G = (X, E) không có khuyên và mỗi cặp đỉnh được nối với nhau bằng không quá một cạnh, được gọi là *đồ thị đơn* hay *đơn đồ thị* và thông thường được gọi là đồ thị.

Đồ thị G = (X, E) không có khuyên và có ít nhất một cặp đỉnh được nối với nhau bằng từ hai cạnh trở lên được gọi là *đa đồ thị*.

Đồ thị vô hướng (có hướng) G = (X, E) được gọi là đồ thị đầy đủ, nếu mỗi cặp đỉnh được nối với nhau bằng đúng một cạnh (một cung với chiều tuỳ ý).

Đồ thị (đa đồ thị) G = (X, E) được gọi là hữu hạn nếu số đỉnh của nó hữu hạn, tức tập X có lực lượng hữu hạn.

Cho $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$; $H \subseteq E$, $F = E \cap (Y \times Y)$

Đồ thị $G_1 = (Y, F)$ được gọi là *đồ thị con*, còn $G_2 = (X, H)$ là *đồ thị bộ phận* của đồ thị G = (X, E)

Đồ thị (đa đồ thị) G = (X, E) được gọi là đồ thị (đa đồ thị) hai mảng, nếu tập đỉnh X được phân thành hai tập con rời nhau X_1, X_2 ($X_1 \cup X_2 = X$ và $X_1 \cap X_2 = \emptyset$) và mỗi cạnh đều có một đầu thuộc X_1, còn đầu kia thuộc X_2. Khi đó G = (X, E) còn được ký hiệu bằng $G = (X_1, X_2; E)$.

§2. Bậc của đỉnh đồ thị.

Để khẳng định lượng số cạnh thuộc mỗi đỉnh đồ thị người ta đưa ra khái niệm bậc của đỉnh. Đối với đồ thị và đa đồ thị có hướng để định lượng số cung đi vào và số cung đi ra tại mỗi đỉnh còn có khái niệm nửa bậc vào và nửa bậc ra.

I. Bậc của đỉnh.

Giả sử G = (X, E) là một đồ thị hay đa đồ thị có hướng hoặc là không có hướng. Số cạnh và cung thuộc đỉnh x được gọi là bậc của đỉnh x và ký hiệu bằng m(x).

Ví dụ 2.1. Trong đồ thị hình 2.1:

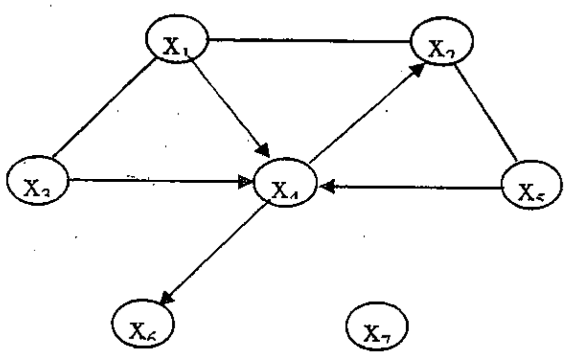
$m(x_1) = m(x_2) = 3$

$m(x_3) = m(x_5) = 2$

$m(x_4) = 5$

$m(x_6) = 1$

$m(x_7) = 0$.



H 2.1

Đỉnh có bậc bằng 0 được gọi là đỉnh biệt lập.

Đỉnh có bậc bằng 1 được gọi là đỉnh treo.

Cạnh (cung) có ít nhất một đầu là đỉnh treo được gọi là cạnh (cung) treo.

Trong đồ thị hình 2.1, x_7 là đỉnh biệt lập, x_6 là đỉnh treo. (x_4, x_6) là cung treo.

II. Nửa bậc.

Giả sử G = (X, E) là đồ thị hoặc đa đồ thị có hướng. Số cung đi vào đỉnh x được gọi là nửa bậc vào của đỉnh x và ký hiệu bằng $m'(x)$ hoặc $m^{-}(x)$.

Số cung đi ra khỏi đỉnh x được gọi là nửa bậc ra của đỉnh x và ký hiệu bằng $m''(x)$ hoặc $m^{+}(x)$.

Ví dụ 2.2. Trong hình 2.2:

$m'(x_1) = 0,\ m''(x_1) = 3$

$m'(x_2) = 1,\ m''(x_2) = 2$

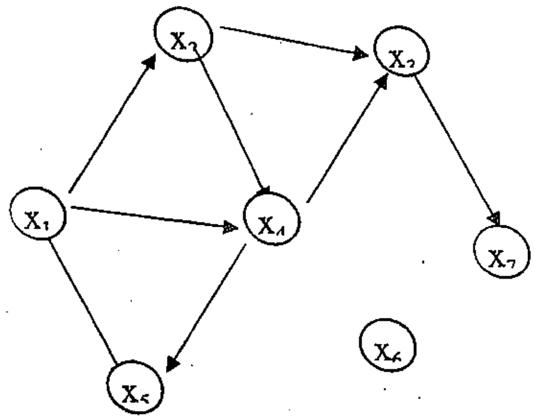
$m'(x_3) = 2,\ m''(x_3) = 1$

$m'(x_4) = 2,\ m''(x_4) = 2$

$m'(x_5) = 2,\ m''(x_5) = 0$

$m'(x_6) = m''(x_6) = 0$

$m'(x_7) = 1,\ m''(x_7) = 0$



H 2.2

III. Một số tính chất.

Định lý 2.1: Trong một đồ thị hay đa đồ thị tuỳ ý tổng số bậc của tất cả các đỉnh luôn luôn gấp đôi số cạnh.

Thật vậy, khi tính bậc của các đỉnh mỗi cạnh vô hướng hoặc có hướng đều được tính mỗi đầu đúng một lần, nên dễ dàng suy ra khẳng định trên.

Định lý 2.2: Trong một đồ thị hay đa đồ thị tuỳ ý số đỉnh bậc lẻ luôn luôn là một số chẵn.

Chứng minh:

Giả sử đồ thị (đa đồ thị) G = (X, E) có n đỉnh, m cạnh

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$$

Các đỉnh $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bậc lẻ và các đỉnh $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ bậc chẵn.

Theo định lý 2.1 có đẳng thức

$$\underbrace{m(x_1) + m(x_2) + \ldots + m(x_k)}_{A} + \underbrace{m(x_{k+1}) + \ldots + m(x_{n-1}) + m(x_n)}_{B} = 2m$$

Vì B là tổng của các số chẵn, nên B là số chẵn. Bởi vậy A = 2m – B là một số chẵn.

Số chẵn A là tổng của k số lẻ, nên k phải chẵn. Bởi vậy số đỉnh bậc lẻ trong đồ thị, trong đa đồ thị bất kỳ phải là một số chẵn.

Định lý 2.3: Trong một đồ thị với n ($n \geq 2$) đỉnh có ít nhất 2 đỉnh cùng bậc.

Chứng minh:

Giả sử: G = (X, E) là đồ thị tuỳ ý với $|X| = n \geq 2$. Xét hai khả năng sau:

1. Nếu đồ thị có đỉnh bậc 0, thì trong đồ thị không có một đỉnh nào kề với tất cả các đỉnh còn lại, nên mỗi đỉnh của đồ thị có bậc là một trong n – 1 số nguyên:

$$0, 1, 2, \ldots, n-3, n-2.$$

2. Nếu đồ thị có đỉnh bậc n – 1, thì đồ thị không có đỉnh bậc 0. Bởi vậy bậc của mỗi đỉnh thuộc đồ thị là một trong n – 1 số nguyên:

$$1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1.$$

Từ kết quả lý luận trên khẳng định được rằng: Đồ thị G = (X, E) với n đỉnh, nhưng chỉ có không quá n – 1 loại bậc. Bởi vậy phải có ít nhất 2 đỉnh cùng bậc. Khẳng định được chứng minh:

Định lý 2.4: Nếu đồ thị với n ($n > 2$) đỉnh có đúng 2 đỉnh cùng bậc, thì hai đỉnh này không thể đồng thời bậc 0 hoặc bậc n – 1.

Chứng minh:

Giả sử x, y là hai đỉnh cùng bậc của đồ thị G = (X, E) và đều có bậc 0 hoặc bậc n – 1. Loại x, y và tất cả các cạnh thuộc chúng khỏi đồ thị G ta được đồ thị con G_1 có n – 2 đỉnh. Theo định lý 2.3 trong G_1 có hai đỉnh cùng bậc, chẳng hạn u, v.

1. Nếu x, y cùng bậc 0, thì u, v trong G không kề với x, y nên u, v trong G đồng thời là 2 đỉnh cùng bậc. Như vậy đồ thị G phải có ít nhất 2 cặp đỉnh cùng bậc.

2. Nếu x, y đều bậc n – 1. Khi đó mỗi đỉnh u, v đều kề đồng thời với x, y nên trong đồ thị G các đỉnh u, v cũng cùng bậc. Như vậy, đồ thị G phải có ít nhất hai cặp đỉnh cùng bậc.

Cả hai trường hợp có thể đều dẫn tới mâu thuẫn với tính chất: Đồ thị G có duy nhất một cặp đỉnh cùng bậc nên x, y không thể cùng bậc 0 hoặc cùng bậc n – 1. Khẳng định được chứng minh.

Định lý 2.5: Số đỉnh bậc n – 1 trong đồ thị G với n ($n \geq 4$) đỉnh, mà 4 đỉnh tuỳ ý có ít nhất một đỉnh kề với 3 đỉnh còn lại, không nhỏ hơn n – 3.

Chứng minh:

1. Nếu G là đồ thị đầy đủ, thì khẳng định hiển nhiên.

2. Nếu G có cặp đỉnh duy nhất không kề nhau. Khi đó trong G có n – 2 đỉnh bậc n – 1.

3. Nếu G có hai cặp đỉnh không kề nhau, thì chúng phải có đỉnh chung.

Thật vậy, giả sử A, B; I, D là hai cặp đỉnh không kề nhau. Nếu hai cặp đỉnh này không có đỉnh chung, thì trong bốn đỉnh A, B, I, D không có đỉnh nào kề với ba đỉnh còn lại. Như vậy mâu thuẫn với giả thiết, nên hai cặp đỉnh A, B; I, D phải có hai đỉnh trùng nhau, chẳng hạn B ≡ I.

Lấy đỉnh C tuỳ ý khác với A, B, D. Trong bộ bốn A, B, C, D đỉnh C là đỉnh kề với cả 3 đỉnh A, B, D.

Loại D ra khỏi bộ bốn và thay vào đó là đỉnh E tuỳ ý khác với A, B, C, D. Trong bộ bốn A, B, C, E hoặc C hoặc E phải kề với 3 đỉnh còn lại. Nếu E kề với 3 đỉnh còn lại thì E cũng kề với C. Do đó C kề với tất cả ba đỉnh A, B, E.

Do E là đỉnh tuỳ ý trong n – 4 đỉnh còn lại (khác với A, B, C) nên C có bậc n – 1.

C là đỉnh tuỳ ý trong n – 3 đỉnh bậc n – 1. Khẳng định được chứng minh.

Định lý 2.6: Với mọi số tự nhiên n (n > 2) luôn luôn tồn tại đồ thị n đỉnh, mà ba đỉnh tuỳ ý của đồ thị đều không cùng bậc.

Chứng minh:

1. Với n = 3 đồ thị G_3 gồm 1 đỉnh bậc 0 và 2 đỉnh bậc 1.

2. Giả sử khẳng định đúng với đồ thị G_n có n đỉnh. Đồ thị G_{n+1} có n+1 đỉnh được xây dựng như sau:

a. Nếu G_n có đỉnh bậc n – 1, thì không có đỉnh bậc 0, nên ta ghép vào G_n đỉnh x bậc 0 và được đồ thị G_{n+1} gồm n+1 đỉnh. Việc ghép thêm đỉnh x vẫn bảo toàn tính chất của G_n: ba đỉnh bất kỳ đều không cùng bậc. Mặt khác đồ thị G_n không có đỉnh bậc 0, nên trong G_{n+1} ba đỉnh bất kỳ đều không cùng bậc.

b. Nếu G_n không có đỉnh bậc n – 1. Khi đó tất cả các đỉnh của G_n đều có bậc không vượt quá n – 2. Thêm vào G_n đỉnh x (không thuộc G_n) và nối x với từng đỉnh thuộc G_n bằng một cạnh, được đồ thị G_{n+1} gồm n+1 đỉnh. Đỉnh x có bậc n, còn bậc của mỗi đỉnh thuộc G_n trong G_{n+1} được tăng lên một đơn vị, nhưng đều không vượt quá n – 1 và trong bậc mới ba đỉnh bất kỳ của G_n vẫn không cùng bậc. Khẳng định được chứng minh.

Định lý 2.7: Trong đồ thị G = (X, E) với ít nhất k.n + 1 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn (k - 1)n + 1, luôn luôn tồn tại đồ thị con đầy đủ gồm k+1 đỉnh.

Chứng minh: Khẳng định được chứng minh bằng quy nạp theo k.

1. Với k = 1 khẳng định hiển nhiên đúng.

2. Với k = 2 có thể làm chặt chẽ hơn giả thiết. Nếu đồ thị 2n + 1 đỉnh, mà mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn n, thì nó có đồ thị con 3 đỉnh đầy đủ. Thật vậy, xét đỉnh x tuỳ ý, còn y là một trong các đỉnh kề với x. Tổng số đỉnh kề với x và y không nhỏ hơn 2n, nhưng số đỉnh khác x và y chỉ là 2n – 1. Bởi vậy, phải có ít nhất một đỉnh z được tính 2 lần. Khi đó x, y, z tạo thành một đồ thị con đầy đủ 3 đỉnh.

3. Giả sử khẳng định trên đúng với k. Cần suy ra tính đúng đắn của khẳng định đối với k + 1.

Theo giả thiết, trong đồ thị G gồm (k + 1)n + 1 đỉnh, số đỉnh kề với đỉnh x tuỳ ý không nhỏ hơn k.n + 1, nên số đỉnh không kề với x sẽ không vượt quá n. Bởi vậy, mỗi đỉnh y kề với x, thì nó kề với nhiều nhất n đỉnh không kề với đỉnh x. Do đó đỉnh y phải kề với ít nhất k.n + 1 – n = (k – 1)n + 1 đỉnh kề với đỉnh x. Xét đồ thị con G_1 gồm các đỉnh kề với x. Đồ thị con G_1 có ít nhất k.n + 1 đỉnh và mỗi đỉnh của nó kề với ít nhất (k – 1)n + 1 đỉnh thuộc G_1, nên theo giả thiết quy nạp, trong G_1 có đồ thị con đầy đủ G_2 gồm k + 1 đỉnh. Vì đỉnh x kề với từng đỉnh thuộc G_2, nên đỉnh x kết hợp với các đỉnh thuộc G_2 lập thành một đồ thị con đầy đủ gồm k + 2 đỉnh trong đồ thị G.

IV. Ứng dụng.

Có thể vận dụng một số khẳng định đã được chứng minh để giải bài tập

Bài tập 2.1: Chứng minh rằng trong một tập thể tuỳ ý số người mà mỗi người có một số lẻ bạn đồng niên trong tập thể luôn luôn là một số chẵn.

Bài tập 2.2: Chứng minh rằng trong một tập số nguyên dương tuỳ ý số số mà mỗi số có một số lẻ số đồng dư luôn luôn là một số chẵn.

Bài tập 2.3: Chứng minh rằng trong một lớp học tùy ý có từ 2 học sinh trở lên, luôn luôn có ít nhất 2 học sinh, mà các em có số bạn thân trong lớp bằng nhau.

Bài tập 2.4: Chứng minh rằng: Nếu trong một tập số nguyên dương tùy ý M gồm ít nhất 3 số, mà có đúng 2 số có số số đồng dư bằng nhau, thì các số này không thể đồng thời không đồng dư với một số nào hoặc đồng thời đồng dư với tất cả các số còn lại thuộc tập M.

Bài tập 2.5: Một cuộc hội thảo có n ($n \geq 4$) đại biểu tham dự. Cứ bốn đại biểu đến dự có ít nhất một người có thể trao đổi chuyên môn sâu với 3 người còn lại.

Chứng minh rằng có ít nhất n – 3 đại biểu, mà mỗi đại biểu có thể trao đổi chuyên môn sâu với tất cả các đại biểu còn lại.

Bài tập 2.6: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ($n \geq 2$) luôn luôn tìm được một nhóm gồm n số nguyên, mà 3 số bất kỳ thuộc nhóm đều không có số số đồng dư bằng nhau.

Bài tập 2.7: Chứng minh rằng trong một xã tùy ý gồm k.n + 1 thôn cách biệt (k, n là các số nguyên dương) và mỗi thôn đều có đường đi tới ít nhất (k – 1)n + 1 thôn khác, thuộc xã, luôn luôn tồn tại một nhóm gồm k + 1 thôn, mà mỗi thôn đều có đường đi đến từng thôn khác thuộc nhóm.

Hướng dẫn:

Để giải các bài toán trên trước hết chuyển chúng về dạng các bài toán trên đồ thị. Sau đó dựa vào các tính chất đã được khẳng định mà suy ra kết luận được phát biểu trong các bài toán.

1. Xây dựng các đồ thị G_{2i} tương ứng với các bài toàn 2i ($1 \leq i \leq 7$).

Xây dựng đồ thị G_{21}.

a.Đỉnh: Lấy các điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với các người sống trong tập thể được xét đồng thời dùng ngay mã số của họ để ghi trên các điểm tương ứng.

b.Cạnh: Trong đồ thị G_{21} cặp đỉnh x, y được nối bằng một cạnh khi và chỉ khi hai người tương ứng với các đỉnh này cùng tuổi.

Đồ thị G_{21} mô tả toàn bộ quan hệ đồng niên trong một tập thể được xét.

Các đồ thị G_{2i} ($2 \leq i \leq 7$) được xây dựng một cách tương tự.

2. Vận dụng các tính chất vào các đồ thị tương ứng để suy ra các khẳng định đã được phát biểu trong các bài toán đã nêu.

a. Với cách xây dựng trên bậc của mỗi đỉnh thuộc đồ thị G_{21} bằng đúng số bạn đồng niên của người tương ứng với đỉnh đó. Theo định lý 22 số đỉnh bậc lẻ trong G_{21} là một số chẵn, nên số người có một số lẻ bạn đồng niên trong tập thể là một số chẵn.

b.Tương tự khẳng định trong bài toán 2i ($2 \leq i \leq 7$) suy từ kết quả vận dụng định lý 2i vào đồ thị G_{2i}.

§3. Xích, chu trình, đường và vòng.

Đối với đồ thị (đa đồ thị) vô hướng có khái niệm xích (dây chuyền) và chu trình, còn đối với đồ thị (đa đồ thị) có hướng tồn tại khái niệm đường và vòng. Tuy vậy, người ta vẫn thường dùng khái niệm đường cho cả đồ thị và đa đồ thị vô hướng.

I. Xích, chu trình.

Giả sử G = (X, E) là một đồ thị hay đa đồ thị vô hướng.

Dãy α các đỉnh của G = (X, E):

$$\alpha = [x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n]$$

được gọi là một xích hay một dây chuyền, nếu $\forall i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ cặp đỉnh x_i, x_{i+1} kề nhau.

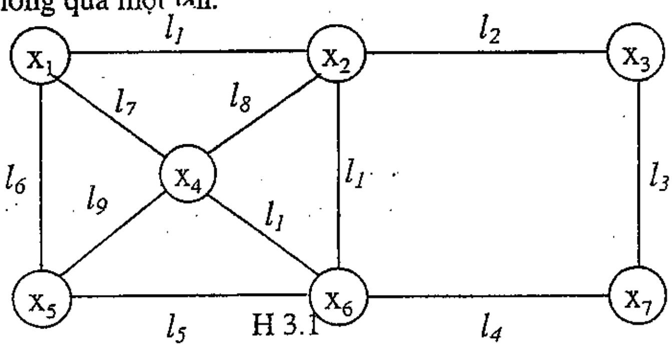
Tổng số vị trí của tất cả các cạnh xuất hiện trong xích α, được gọi là độ dài của xích α, đồng thời được ký hiệu bằng $|\alpha|$.

Các đỉnh x_1, x_n được gọi là hai đỉnh đầu của xích α. Ngoài ra, còn nói rằng xích α nối giữa các đỉnh x_1 và x_n. Để chỉ rõ đỉnh đầu và đỉnh cuối ta còn ký hiệu α bằng $\alpha[x_1, x_n]$.

Một xích có hai đầu trùng nhau, được gọi là một chu trình.

Xích (chu trình) α, được gọi là xích (chu trình) đơn (sơ cấp hay cơ bản), nếu nó đi qua mỗi cạnh (mỗi đỉnh) không quá một lần.

Ví dụ 3.1: Cho đồ thị



H 3.1

$\alpha = [x_1, x_2, x_3, x_7, x_6, x_5, x_1]$ là chu trình đơn và sơ cấp.

$\alpha_1 = [x_1, x_4, x_2, x_6, x_4, x_5, x_1]$ là chu trình đơn, nhưng không là chu trình sơ cấp.

II. Đường, vòng.

Giả sử G = (X, E) là đồ thị hay đa đồ thị có hướng.

Dãy đỉnh β của G = (X, E):

$$\beta = [x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m]$$

được gọi là một đường hay một đường đi, nếu $\forall i$ $(1 \leq i \leq m-1)$ đỉnh x_i là đỉnh đầu, còn x_{i+1} là đỉnh cuối của một cung nào đó.

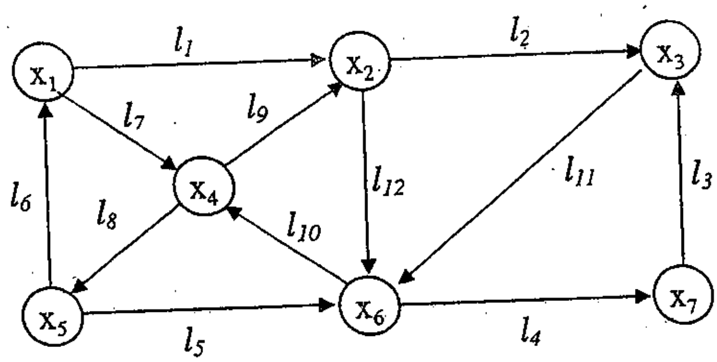
Tổng số vị trí của tất cả các cung xuất hiện trong β được gọi là độ dài của đường β, đồng thời được ký hiệu bằng |β|.

Đỉnh x_1 được gọi là đỉnh đầu, còn x_m là đỉnh cuối của đường β. Người ta còn nói rằng: Đường β xuất phát từ đỉnh x_1 và đi tới đỉnh x_m. Đường β còn được ký hiệu bằng $\beta[x_1, x_m]$.

Một đường có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau được gọi là một vòng.

Đường (vòng), được gọi là đường (vòng) đơn (sơ cấp hay cơ bản), nếu nó đi qua mỗi cạnh (mỗi đỉnh) không quá một lần.

Ví dụ 3.2: Cho đồ thị có hướng.



H 3.2

$\beta_1 = [x_1, x_2, x_3, x_6, x_4, x_5, x_1]$ là vòng đơn sơ cấp.

$\beta_2 = [x_1, x_4, x_2, x_6, x_4, x_5, x_1]$ là vòng đơn nhưng không sơ cấp.

$\beta_3 = [x_1, x_4, x_2, x_3, x_6, x_4, x_2]$ là đường không đơn và không sơ cấp.

III. Một số tính chất.

Định lý 3.1

Trong một đồ thị vô hướng với n ($n \geq 3$) đỉnh và các đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn 2 luôn luôn tồn tại chu trình sơ cấp.

Chứng minh

Vì đồ thị hữu hạn, mà xích sơ cấp qua từng đỉnh không quá một lần, nên số xích sơ cấp trong đồ thị G = (X, E) là một số hữu hạn. Bởi vậy, luôn luôn xác định được xích sơ cấp có độ dài cực đại trong đồ thị G = (X, E).

Giả sử $\alpha = [x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k]$ là một trong những xích sơ cấp có độ dài cực đại. Do bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn 2, nên x_1 phải kề với một đỉnh y nào đó khác với x_2.

Nếu y không thuộc α, tức là khác với các đỉnh x_i ($3 \leq i \leq k$), thì xích sơ cấp

$\alpha' = (y, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k)$

có độ dài $|\alpha'| = |\alpha| + 1 > |\alpha|$. Ta đã đi tới mâu thuẫn với tính chất độ dài cực đại của α. Bởi vậy y phải thuộc α, tức $y \equiv x_i$ ($3 \leq i \leq k$), nên trong đồ thị $G = (X, E)$ có chu trình sơ cấp

$$\beta = [x_1, x_2, \ldots, x_i, x_1]$$

Định lý 3.2

Trong đồ thị vô hướng với n ($n \geq 4$) đỉnh và các đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn 3 luôn luôn tồn tại chu trình sơ cấp độ dài chẵn.

Chứng minh

Giả sử α là một trong những xích sơ cấp có độ dài cực đại

$\alpha = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k)$

Vì α có độ dài cực đại, mà bậc của x_1 không nhỏ hơn 3, nên x_1 phải kề với hai đỉnh khác thuộc α: x_i ($3 \leq i \leq k$), x_j ($3 \leq j \leq k$). Khi đó có hai chu trình sơ cấp:

$\alpha_1 = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_1)$

$\alpha_2 = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_1)$

1) Nếu một trong hai chu trình α_1, α_2 có độ dài chẵn, thì khẳng định được chứng minh.

2) Ngược lại, nếu cả hai chu trình α_1, α_2 đều có độ dài lẻ. Khi đó xích:

$\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_i)$

có độ dài chẵn, còn xích

$\alpha_4 = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_1)$

có độ dài lẻ, nên chu trình:

$\alpha_5 = (x_1, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_1)$

có độ dài chẵn. Khẳng định được chứng minh.

IV. Ứng dụng.

Các bài tập sau xem như các ví dụ ứng dụng định lý 3.1 và định lý 3.2.

Bài tập 3.1: Một cuộc sinh hoạt có ít nhất ba đại biểu đến dự. Mỗi đại biểu đã bắt tay ít nhất hai đại biểu khác. Chứng minh rằng có thể xếp một số đại biểu ngồi xung quanh một bàn tròn, để mỗi người ngồi giữa hai người mà đại biểu đó đã bắt tay.

Bài tập 3.2: Một tập số nguyên dương M gồm ít nhất ba số. Mỗi số đều có ước chung với ít nhất hai số khác. Chứng minh rằng luôn luôn có thể ghi một nhóm gồm ít nhất ba số thuộc tập hợp lên một vòng tròn, để mỗi số đều đứng giữa hai số mà nó có ước chung.

Bài tập 3.3: Một tập thể có ít nhất 4 thành viên. Mỗi thành viên thân với ít nhất 3 thành viên khác. Chứng minh rằng có thể xếp một số chẵn thành viên ngồi xung quanh một bàn tròn, để mỗi thành viên đều ngồi giữa hai thành viên mà thành viên đó thân.

Bài tập 3.4: Một tập gồm ít nhất 4 số nguyên dương M_1, mà mỗi số đều có ước chung với ít nhất 3 số khác. Chứng minh rằng luôn luôn có thể ghi một nhóm gồm chẵn số thuộc tập đã cho lên một vòng tròn, để mỗi số đều đứng giữa hai số mà nó có ước chung.

Để giải các bài tập trên trước hết xây dựng các đồ thị tương ứng. Sau đó vận dụng kết quả của các định lý 3.1 và 3.2 để suy ra kết luận.

1. Xây dựng đồ thị.

Đỉnh: Lấy các điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với các đại biểu đến dự họp (Các số nguyên dương, các thành viên của tập thể).

Cạnh: Hai điểm x, y được nối bằng một cạnh khi và chỉ khi hai đại biểu x, y bắt tay nhau (hai số x, y có ước chung, hai thành viên x, y thân nhau).

Đồ thị nhận được ký hiệu bằng G_1, G_2, G_3 và G_4.

Đồ thị G_1 mô tả toàn bộ quan hệ bắt tay của các đại biểu đến dự sinh hoạt.

Đồ thị G_2 mô tả toàn bộ quan hệ có ước chung của tập số M.

Đồ thị G_3 mô tả toàn bộ quan hệ thân nhau của các thành viên thuộc tập thể.

Đồ thị G_4 mô tả toàn bộ quan hệ có ước chung của các số thuộc tập M_1.

2. Vận dụng kết quả của các định lý để suy ra kết luận.

Vì mỗi đại biểu đã bắt tay ít nhất hai đại biểu đến dự sinh hoạt (mỗi số thuộc M có ước chung với ít nhất hai số khác), nên theo định lý 3.1 trong G_1 (G_2) có chu trình sơ cấp. Khi đó dựa theo một trong những chu trình sơ cấp của G_1 mà xếp các đại biểu tương ứng ngồi xung quanh một bàn tròn, thì mỗi đại biểu đều ngồi giữa hai đại biểu mà đại biểu đó đã bắt tay (dựa theo một trong những chu trình sơ cấp của G_2 mà ghi các số tương ứng lên một vòng tròn, thì mỗi số đều đứng giữa hai số mà nó có ước chung).

Vì mỗi thành viên đều thân với ít nhất 3 thành viên khác (mỗi số đều có ước chung với ít nhất ba số khác), nên bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn 3. Bởi vậy theo định lý 3.2 trong G_3 (G_4) có chu trình độ dài chẵn. Khi đó dựa theo một trong những chu trình độ dài chẵn của G_3 mà xếp chẵn thành viên tương ứng ngồi xung quanh một bàn tròn, thì mỗi thành viên sẽ ngồi giữa hai thành viên mà thành viên đó thân (dựa theo một trong những chu trình độ dài chẵn trong G_4 mà ghi chẵn số tương ứng lên một vòng tròn, thì mỗi số đều đứng giữa hai số mà nó có ước chung).

§4. Đồ thị liên thông

I.Định nghĩa.

Hai đỉnh x, y của đồ thị G = (X, E) được gọi là cặp đỉnh liên thông, nếu hoặc giữa x và y có ít nhất một xích nối với nhau, hoặc tồn tại ít nhất một đường đi từ x sang y hoặc từ y sang x.

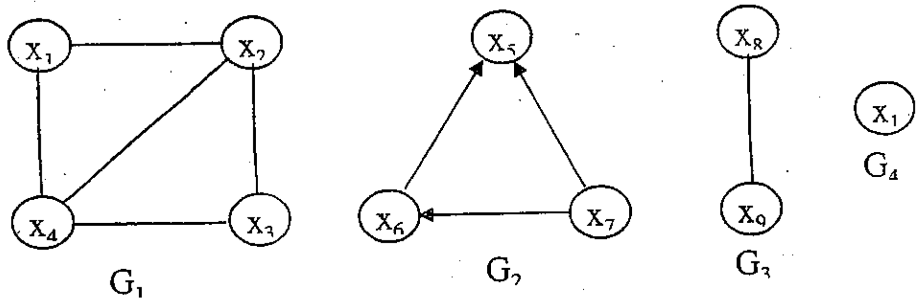
Đồ thị vô hướng G = (X, E) được gọi là *đồ thị liên thông*, nếu mọi cặp đỉnh của nó đều liên thông.

Đồ thị có hướng G = (X, E) được gọi là *đồ thị liên thông mạnh*, nếu mọi cặp đỉnh của nó đều liên thông.

Giả sử a là đỉnh bất kỳ của đồ thị G = (X, E). Dùng C_a để ký hiệu tập con các đỉnh của G, gồm đỉnh a và tất cả các đỉnh liên thông với a trong đồ thị G.

Đồ thị con của G, có tập đỉnh là C_a, được gọi là một thành phần liên thông của đồ thị G.

Ví dụ: Cho đồ thị G có 4 thành phần liên thông:



H 4. 1

Các đồ thị con G_1, G_3, G_4 liên thông, còn đồ thị con G_2 liên thông mạnh.

II.Tính chất.

Định lý 4.1:

Đồ thị vô hướng tùy ý với n ($n \geq 2$) đỉnh, mà tổng bậc của hai đỉnh tùy ý không nhỏ hơn n, là đồ thị liên thông.

Chứng minh

Giả sử đồ thị vô hướng G = (X, E) có n đỉnh ($n \geq 2$). Với mọi cặp đỉnh a, b của đồ thị đều có:

$$m(a) + m(b) \geq n \qquad (1)$$

Nưng a, b không liên thông. Khi đó trong đồ thị G tồn tại hai thành phần liên thông: G_1 chứa a và có n_1 đỉnh, G_2 chứa b và có n_2 đỉnh.

Vì G_1, G_2 là các thành phần liên thông của G, nên $n_1 + n_2 \leq n$

Khi đó:

$m(a) + m(b) \leq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2 < n$ (2)

Như vậy quan hệ (1) và (2) mâu thuẫn nhau, nên đồ thị G phải liên thông. Khẳng định được chứng minh.

Từ định lý trên suy ra hệ quả sau.

Hệ quả 4.1

Đồ thị, mà bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn nửa số đỉnh, là đồ thị liên thông.

Định lý 4.2

Nếu đồ thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ, thì hai đỉnh này phải liên thông.

Chứng minh:

Giả sử đồ thị G = (X, E) có đúng hai đỉnh bậc lẻ và hai đỉnh đó là a và b.

Giả sử a, b không liên thông với nhau. Khi đó chúng phải thuộc hai thành phần liên thông khác nhau của đồ thị G. Chẳng hạn G_1 chứa đỉnh a, còn G_2 chứa đỉnh b.

Bậc của đỉnh a trong G_1 cũng chính là bậc của đỉnh a trong G, nên trong G_1 đỉnh a vẫn có bậc lẻ. Như vậy đồ thị G_1 có duy nhất một đỉnh bậc lẻ. Ta đã đi tới mâu thuẫn với tính chất: Số đỉnh bậc lẻ trong đồ thị là một số chẵn. Bởi vậy a, b phải liên thông.

III. Ứng dụng.

Các bài tập sau xem như những ví dụ ứng dụng các định lý và hệ quả.

Bài tập 4.1: Một quần đảo có n ($n \geq 2$) hòn đảo và hai hòn đảo bất kỳ thuộc quần đảo đều có tổng số đầu mối đường ngầm tới các hòn đảo thuộc quần đảo không nhỏ hơn n.

Chứng minh rằng từ mỗi hòn đảo ta có thể đi tới tất cả các hòn đảo khác thuộc quần đảo bằng đường ngầm.

Bài tập 4.2: Khi về nghỉ hè mỗi em học sinh lớp 12 khối phổ thông chuyên toán đều trao đổi địa chỉ với ít nhất một nửa số bạn trong lớp. Chứng minh rằng trong thời gian hè mỗi em học sinh lớp 12 đều có thể báo tin một cách trực tiếp hay gián tiếp cho từng bạn trong lớp.

Bài tập 4.3: Đến dự sinh hoạt câu lạc bộ có hai đại biểu, mà mỗi đại biểu này đã bắt tay một số lẻ đại biểu. Chứng minh rằng, có thể xếp một số đại biểu ngồi chen giữa hai đại biểu này, để mỗi đại biểu đã bắt tay hai đại biểu ngồi hai bên.

Bài tập 4.4: Trong tập số nguyên dương M có các số a, b mà mỗi số này đều có ước chung với một số lẻ số thuộc M. Chứng minh rằng có thể ghi chen giữa cặp số a, b một số số thuộc M, để mỗi số đều có ước chung với hai số đứng hai bên.

Bài tập 4.5: Trong 5 em bất kì của một lớp học gồm 29 em luôn luôn có 2 em sinh trong cùng một tháng. Chứng minh rằng trong lớp này có ít nhất 8 em sinh cùng một tháng.

Bài tập 4.6: Một lớp học có 36 học sinh. Biết rằng trong 6 em tùy ý của lớp luôn luôn có ít nhất 2 em cùng họ. Chứng minh rằng trong lớp có ít nhất 8 em cùng họ.

Bài tập 4.7: Chứng minh rằng con Mã với bước đi thông thường không thể đi hết được các ô của bàn cờ 3 x 3 ô vuông.

Để giải 4 bài tập đầu tiên trước hết ta xây dựng các đồ thị tương ứng. Sau đó vận dụng các định lý 4.1; 4.2 và hệ quả 4.1 để suy ra kết luận.

1. Xây dựng đồ thị

Đỉnh: Lấy các điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với các hòn đảo (các học sinh lớp 12, các đại biểu đến dự sinh hoạt câu lạc bộ, các số thuộc tập M).

Cạnh: Hai điểm x, y được nối bằng một cạnh khi và chỉ khi hai hòn đảo tương ứng có đường ngầm nối với nhau (hai em học sinh tương ứng trao đổi địa chỉ cho nhau, hai đại biểu tương ứng bắt tay nhau, hai số tương ứng có ước chung).

Đồ thị nhận được ký hiệu một cách tương ứng bằng G_1, G_2, G_3 và G_4.

Đồ thị G_1 mô tả toàn bộ quan hệ có đường ngầm trong quần đảo ta xét.

Đồ thị G_2 mô tả toàn bộ quan hệ trao đổi địa chỉ của các em học sinh lớp 12.

Đồ thị G_3 mô tả toàn bộ quan hệ bắt tay giữa các đại biểu đến dự sinh hoạt câu lạc bộ.

Đồ thị G_4 mô tả toàn bộ quan hệ có ước chung giữa các số thuộc tập M.

2. Vận dụng kết quả của các định lý để suy ra kết luận:

a. Do hai hòn đảo bất kỳ đều có tổng số đầu mối đường ngầm không nhỏ hơn n, nên trong đồ thị G_1 tổng bậc của hai đỉnh tùy ý đều không nhỏ hơn số đỉnh của đồ thị. Bởi vậy, theo định lý 4.1, đồ thị G_1 liên thông. Do đó hai đỉnh tùy ý đều có xích nối với nhau. Bởi vậy, hai hòn đảo tùy ý thuộc quần đảo đều có đường ngầm nối với nhau, nên từ mỗi hòn đảo có thể đi tới hòn đảo bất kỳ thuộc quần đảo bằng đường ngầm.

b. Mỗi em học sinh lớp 12 đều trao đổi địa chỉ với ít nhất một nửa bạn trong lớp, nên mỗi đỉnh thuộc đồ thị G_2 đều có cạnh nối với ít nhất một nửa số đỉnh. Bởi vậy, theo hệ quả 4.1, đồ thị G_2 liên thông, nên hai đỉnh tùy ý đều có xích nối với nhau. Bởi vậy mỗi em học sinh lớp 12 đều có thể theo các xích này mà báo tin cho nhau.

c. Hai đại biểu đến dự sinh hoạt câu lạc bộ, mà mỗi người đều bắt tay một số lẻ đại biểu (hai số a, b, mà mỗi số có ước chung với một số lẻ số thuộc tập M), nên trong đồ thị G_3 (G_4) hai đỉnh tương ứng với hai đại biểu này (hai đỉnh tương ứng với các số a, b) đều có bậc lẻ. Bởi vậy hai đỉnh này liên thông, tức có xích nối với nhau. Khi đó theo xích này mà xếp các đại biểu tương ứng ngồi chen giữa hai đại biểu nói trên (ghi các số tương ứng chen giữa hai số a, b), thì mỗi đại biểu sẽ ngồi giữa hai đại biểu mà đại biểu này đã bắt tay (mỗi số đều đứng giữa hai số mà nó có ước chung).

Giải bài 4. 5:

Để giải bài tập này ta cũng phải tiến hành theo hai bước:

I) Xây dựng đồ thị G_5 mô tả quan hệ sinh cùng tháng của các em thuộc lớp học được xét.

1.Đỉnh: Lấy 29 điểm tương ứng với 29 em học sinh của lớp. Dùng ngay tên của các em để ghi trên các điểm tương ứng.

2.Cạnh: Cặp đỉnh x, y được nối bằng một cạnh khi và chỉ khi em x và em y sinh cùng một tháng.

II) Vì 5 em tùy ý thuộc lớp học đều có 2 em sinh cùng tháng, nên 5 đỉnh tùy ý đều có 2 đỉnh kề nhau. Do đó đồ thị G_5 có không quá 4 thành phần liên thông. Giả sử ngược lại, nếu đồ thị G_5 có không ít hơn 5 thành phần liên thông, thì ta chọn 5 em tương ứng với 5 đỉnh thuộc 5 thành phần liên thông khác nhau, thì trong 5 em này không có 2 em nào sinh cùng tháng, nên mâu thuẫn với giả thiết.

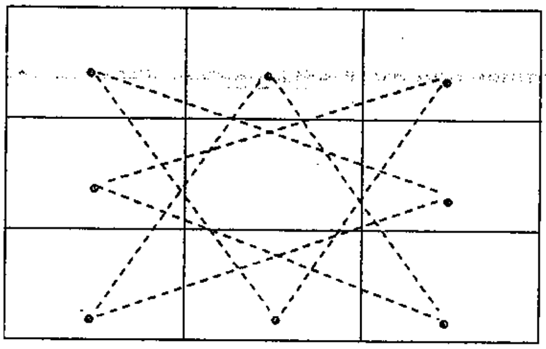
Vì đồ thị G_5 gồm 29 đỉnh mà chỉ có không quá 4 thành phần liên thông, nên phải có ít nhất một thành phần liên thông chứa không ít hơn 8 đỉnh. Bởi vậy có ít nhất 8 em có cùng tháng sinh.

Giải bài 4.6: Tương tự như bài 4.5

Giải bài 4.7:

I) Xây dựng đồ thị mô tả nước đi của con Mã.

Lấy 9 ô của bàn cờ 3 x 3 làm đỉnh. Cặp đỉnh là đường chéo hình chữ nhật 2 x 3 hoặc 3 x 2 đều được nối bằng một cạnh. Ta được đồ thị G_6 mô tả toàn bộ nước đi của con Mã trên bàn cờ 3 x 3.



H 4. 2

II) Do đồ thị G_6 không liên thông.

Đỉnh tương ứng với ô trung tâm không nằm trên đường nào, nên con Mã không thể đi qua ô này. Bởi vậy con Mã không đi qua được tất cả các ô thuộc bàn cờ 3 x 3

§5. Sắc số và đồ thị tô màu

Trong phần này sẽ trình bầy về các đồ thị, mà hoặc tập đỉnh hoặc tập cạnh của chúng được tô bằng từ hai màu trở lên.

I. Định nghĩa

Sắc số của đồ thị là số màu ít nhất cần dùng để tô trên các đỉnh của đồ thị (mỗi đỉnh một màu), sao cho hai đỉnh kề nhau (có cạnh nối với nhau) tùy ý được tô bằng hai màu khác nhau.

Sắc lớp là số màu ít nhất cần dùng để tô trên các cạnh của đồ thị (mỗi cạnh một màu), sao cho hai cạnh kề nhau (có đỉnh chung) tùy ý đều có màu khác nhau.

II. Một số tính chất

Định lý 5.1:

Một chu trình độ dài lẻ luôn luôn có sắc số bằng 3.

Chứng minh:

Giả sử α là một chu trình độ dài lẻ tuỳ ý. Khi đó tồn tại số tự nhiên n, để $|\alpha| = 2n + 1$.

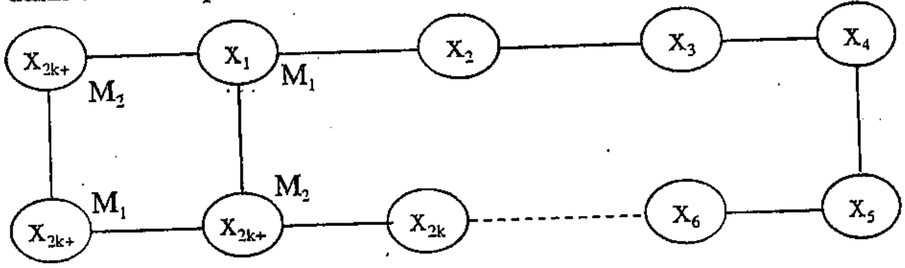
Ký hiệu các đỉnh của α một cách trực tiếp bằng $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, x_{2n+1}$.

Ta sẽ chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo n.

1) Cơ sở quy nạp: Với n = 1. Chu trình α gồm 3 đỉnh x_1, x_2, x_3. Do mỗi đỉnh x_i ($1 \leq i \leq 3$) đều kề với hai đỉnh còn lại, nên ta phải dùng đúng 3 màu khác nhau, thì mới đủ tô trên mỗi đỉnh một màu, để hai đỉnh kề nhau tuỳ ý đều có màu khác nhau.

2) Quy nạp: Giả sử khẳng định đã đúng với $n \le k$, nghĩa là đối với chu trình α_1 tùy ý với độ dài $2n + 1$ ($1 \le n \le k$) đều có sắc số bằng 3. Cần chỉ ra rằng với $n = k + 1$ khẳng định vẫn đúng, nghĩa là chu trình α tùy ý với độ dài $2(k + 1) + 1$ cũng có sắc số bằng 3.

Giả sử α là chu trình độ dài lẻ tùy ý có độ dài bằng $2(k + 1) + 1$ và có tập đỉnh được đánh số liên tiếp là $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+3}\}$.



H 5.1

Nối đỉnh x_1 với đỉnh x_{2k+1} ta được chu trình α_1 với độ dài $2k + 1$. Theo giả thiết quy nạp sắc số của α_1 bằng 3 đồng thời x_1 và x_{2k+1} có màu khác nhau. Chẳng hạn, x_1 được tô màu M_1 và x_{2k+1} được tô bằng màu M_2. Khi đó để tô đỉnh x_{2k+2} ta có thể dùng lại màu M_1 và tô đỉnh x_{2k+3} ta dùng lại màu M_2. Nghĩa là không phải thêm màu mới. Vậy sắc số của α bằng 3 và khẳng định được chứng minh.

Lớp đồ thị có chu trình tam giác cùng màu

Để phục vụ cho việc giải quyết một số bài toán nào đó cần xét những dãy số đặc biệt và đưa ra các khẳng định thích hợp, chẳng hạn, để xây dựng những lớp đồ thị có chu trình tam giác cùng màu người ta đưa ra các dãy số nguyên dương:

$a_1 = 2;\ a_2 = 5, \ldots, a_{n+1} = (n + 1)a_n + 1$

$u_2 = 3, u_3 = 6, \ldots, u_{n+1} = (u_n - 1)n + 2$

và có định lý sau:

Định lý 5.2:

a. Một đồ thị đầy đủ và vô hướng với a_n+1 đỉnh, các cạnh được tô bằng n màu luôn luôn có chu trình tam giác cùng màu.

b. Một đồ thị đầy đủ vô hướng với U_{n+1} đỉnh, các cạnh được tô bằng n màu luôn luôn có chu trình tam giác cùng màu.

Chứng minh phần a (bằng quy nạp theo chỉ số n)

1. Cơ sở quy nạp:

Với n = 1 đồ thị đầy đủ tương ứng gồm $a_1 + 1 = 2 + 1 = 3$ đỉnh lập thành một chu trình tam giác. Các cạnh của đồ thị này được tô bằng một màu, nên chu trình tam giác lập nên G_2 cùng màu.

2. *Quy nạp*: Giả sử khẳng định đã đúng với n = k, nghĩa là đồ thị đầy đủ bất kỳ G_k gồm $a_k + 1$ đỉnh với các cạnh được tô bằng k màu đã có chu trình tam giác cùng màu. Cần chứng tỏ khẳng định cũng đúng với n = k + 1.

Xét đồ thị đầy đủ tuỳ ý G_{k+1} với $a_{k+1} + 1$ đỉnh và các cạnh được tô bằng k + 1 màu.

Giả sử P là một đỉnh tuỳ ý của G_{k+1}.

Khi đó P được nối với $a_{k+1} = (k + 1)\, a_k + 1$ đỉnh bằng các cạnh được tô bởi không quá k + 1 màu, nên xuất phát từ P phải có ít nhất $a_k + 1$ cạnh được tô bằng cùng một màu. Giả sử màu này là màu đỏ và các cạnh $PA_1, PA_2, \ldots, PA_{a_k}, PA_{a_k+1}$ được tô bằng màu đỏ. Có hai khả năng suy ra:

1) Nếu một trong các cạnh nối giữa các đỉnh A_i, A_j $(1 \leq i, j \leq a_k + 1)$ được tô màu đỏ, chẳng hạn cạnh (A_1, A_2) màu đỏ. Khi đó chu trình tam giác A_1PA_2 màu đỏ, nên đồ thị G_{k+1} có chu trình tam giác màu đỏ.

2) Nếu không có cạnh nào trong các cạnh $A_i A_j$ $(1\leq i, J \leq a_k + 1)$ được tô màu đỏ, thì khi đó đồ thị con đầy đủ G_k với tập đỉnh $\{A_1, A_2, \ldots, A_{a_k}, A_{a_k+1}\}$ có các cạnh được tô bằng k màu, nên theo giả thiết quy nạp đồ thị G_k đã có chu trình tam giác cùng màu. Bởi vậy đồ thị G_{k+1} có chu trình tam giác cùng màu. Khẳng định được chứng minh.

Phần b chứng minh tương tự

III. Ứng dụng

Bài tập 5.1. Trên mặt phẳng lấy 6 điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng, khoảng cách giữa các cặp điểm khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng luôn luôn tồn tại ít nhất một cặp điểm, mà đoạn thẳng nối giữa chúng là cạnh ngắn nhất thuộc một tam giác nào đó, đồng thời là cạnh dài nhất của một tam giác khác trong các tam giác có đỉnh là các điểm đã cho.

*Bài tập 5.2.*Chứng minh rằng trong 6 số nguyên tuỳ ý luôn luôn hoặc có bộ ba có ước chung hoặc có một bộ ba nguyên tố cùng nhau từng đôi một.

*Bài tập 5.3.*Mười bảy nhà khoa học đến dự hội nghị quốc tế. Mỗi người trong số họ chỉ biết một trong ba ngoại ngữ: Anh, Nga, Pháp.

Chứng minh rằng có ít nhất ba nhà khoa học cùng biết một trong ba ngoại ngữ nói trên.

*Bài tập 5.4.*Một nhóm học viên gồm 17 người đến từ ba địa phương A, B, C. Chứng minh rằng có ít nhất ba học viên đến cùng một địa phương.

*Bài tập 5.5.*Có 5 thành phố, mà từ mỗi thành phố đều có đường bay đến một số thành phố khác. Biết rằng cứ ba thành phố bất kỳ trong năm thành phố này đều có hai thành phố có đường bay trực tiếp đến nhau và hai thành phố chưa có đường bay trực tiếp. Chứng minh rằng:

1. Mỗi thành phố có đường bay trực tiếp đến hai và chỉ hai thành phố khác.

2. Từ mỗi thành phố có thể bay đến các thành phố khác mỗi nơi một lần rồi quay về được nơi xuất phát.

*Bài tập 5.6.*Chứng minh rằng trong 6 người tuỳ ý luôn hình thành hai bộ ba (có thể có phần tử chung), mà trong mỗi bộ ba này hoặc họ quen nhau từng đôi một hoặc họ không quen nhau từng đôi một.

Giải bài tập 5.1: Để giải bài toán này trước hết dùng màu xanh để tô mỗi đoạn thẳng là cạnh ngắn nhất của một tam giác nào đó trong các tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Phần đoạn thẳng còn lại được tô bằng màu đỏ. Khi đó được đồ thị G_1 gồm 6 đỉnh với các cạnh được tô bằng 2 màu: xanh, đỏ.

Theo định lý 5.1 đồ thị G_1 có chu trình tam giác cùng màu. Do khoảng cách giữa các cặp điểm khác nhau từng đôi một, nên tam giác nào với đỉnh là các điểm đã cho đều có cạnh ngắn nhất, mà cạnh này được dùng màu xanh để tô trước. Bởi vậy chu trình tam giác cùng màu phải là tam giác màu xanh. Khi đó cạnh dài nhất trong tam giác này chính là đoạn thẳng cần tìm.

Giải bài tập 5.2:

Lấy 6 điểm tương ứng với 6 số nguyên x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Dùng ngay 6 số này để ghi trên các điểm tương ứng. Như vậy ta đã được 6 đỉnh của đồ thị G_2.

Cạnh: Hai đỉnh x_i, x_j ($1 \le i, j \le 6$) được nối bằng đoạn thẳng màu xanh khi và chỉ khi hai số x_i, x_j có ước chung. Các cặp đỉnh còn lại, tức các cặp đỉnh tương ứng với hai số nguyên tố cùng nhau, được nối bằng những đoạn thẳng màu đỏ. Đồ thị G_2 gồm 6 đỉnh với các cạnh được tô bằng hai màu: xanh, đỏ, nên theo định lý 5.1, đồ thị G_2 có tam giác cùng màu. Nếu tam giác màu xanh, thì ba số tương ứng với ba đỉnh từng cặp có ước chung. Nếu tam giác màu đỏ, thì ba số tương ứng với ba đỉnh nguyên tố cùng nhau.

Giải bài tập 5.3 và 5.4: Lấy 17 điểm tương ứng với 17 nhà khoa học (tương ứng với 17 học viên). Ta được 17 đỉnh của đồ thị G_3.

Cạnh: cặp đỉnh được nối bằng cạnh màu xanh khi và chỉ khi hai nhà khoa học tương ứng cùng biết tiếng anh (hai học viên tương ứng đến từ địa phương A)

Cặp đỉnh được nối bằng cạnh màu đỏ khi và chỉ khi hai nhà khoa học tương ứng cùng biết tiếng Nga (hai học viên tương ứng cùng đến từ địa phương B)

Cặp đỉnh được nối bằng cạnh màu vàng khi và chỉ khi hai nhà khoa học tương ứng cùng biết tiếng Pháp (hai học viên tương ứng cùng đến từ địa phương C)

Đồ thị G_3 bao gồm 17 đỉnh với các cạnh được tô bằng 3 màu, nên theo định lý 5.2 đồ thị G_3 có tam giác cùng màu, nên ba nhà khoa học tương ứng với ba đỉnh biết cùng một ngoại ngữ (ba học viên tương ứng với 3 đỉnh đến từ cùng một địa phương)

§6. Số ổn định trong, số ổn định ngoài và các bài toán trên bàn cờ.

I. Số ổn định trong.

1. Định nghĩa

Giả sử có đồ thị $G = (X, E)$. Tập con $A \subseteq X$ các đỉnh của đồ thị G được gọi là tập ổn định trong, nếu mọi cặp đỉnh thuộc A đều không kề nhau (không có cạnh hoặc cung nối với nhau).

Tập con $B \subseteq X$ các đỉnh của đồ thị G được gọi là tập ổn định trong cực đại, nếu B là tập ổn định trong và nếu thêm vào B một đỉnh tuỳ ý $x \in X$, thì tập còn nhận được $B \cup \{x\}$ sẽ không ổn định trong.

2. Tính chất

Nếu A là tập ổn định trong, thì mọi tập con của A đều phải ổn định trong.

3. Số ổn định trong

Số phần tử của một trong những tập ổn định trong có lực lượng lớn nhất được gọi là số ổn định trong của đồ thị G, đồng thời được ký hiệu bằng $\alpha(G)$

II. Số ổn định ngoài.

1. Định nghĩa

Tập con $B \subseteq X$ các đỉnh của đồ thị G được gọi là tập ổn định ngoài, nếu với mọi đỉnh x thuộc tập $(X - B)$ đều tồn tại đỉnh $y \in B$, để hoặc từ x sang y có cung hoặc cặp đỉnh x, y được nối bằng một cạnh.

2. Tính chất

Nếu B là tập ổn định ngoài, thì mọi tập chứa B đều ổn định ngoài.

3. Số ổn định ngoài

Số phần tử của một trong những tập ổn định ngoài có lực lượng bé nhất được gọi là số ổn định ngoài của đồ thị G, đồng thời ký hiệu bằng $\beta(G)$.

a. Các tập ổn định trong

-Vì đồ thị không có khuyên, nên mỗi đỉnh lập thành một tập ổn định trong: $M_1 = \{x_1\}$, $M_2 = \{x_2\}$, $M_3 = \{x_3\}$, $M_4 = \{x_4\}$, $M_5 = \{x_5\}$, $M_6 = \{x_6\}$, $M_7 = \{x_7\}$.

-Các tập ổn định trong gồm hai đỉnh: $M_8 = \{x_1, x_3\}$, $M_9 = \{x_1, x_4\}$, $M_{10} = \{x_1, x_6\}$, $M_{11} = \{x_2, x_5\}$, $M_{12} = \{x_2, x_7\}$, $M_{13} = \{x_3, x_5\}$, $M_{14} = \{x_3, x_6\}$, $M_{15} = \{x_3, x_7\}$, $M_{16} = \{x_4, x_7\}$, $M_{17} = \{x_5, x_6\}$

-Các tập ổn định trong gồm ba đỉnh: $M_{18} = \{x_1, x_3, x_6\}$. Đây cũng là tập ổn định trong có lực lượng lớn nhất, nên số phần tử của nó chính là số ổn định trong.

b. Số ổn định trong $\alpha(G) = |\{x_1, x_3, x_6\}| = 3$

c. Các tập ổn định ngoài

-Tập ổn định ngoài gồm một đỉnh không có.

-Tập ổn định ngoài gồm 2 đỉnh, chẳng hạn $N_1 = \{x_1, x_2\}$, $N_2 = \{x_1, x_4\}$

d. Số ổn định ngoài $\beta(G) = |\{x_1, x_2\}| = 2$

III. Mối liên hệ giữa số ổn định trong, số ổn định ngoài với các bài toán trên bàn cờ.

Khi xây dựng đồ thị mô tả nước đi của quân cờ, thì số ổn định trong của đồ thị tương ứng chính là số quân cờ tối đa có thể đặt trên bàn cờ để chúng không ăn lẫn nhau, còn số ổn định ngoài là số quân cờ tối thiểu cần đặt, để chúng khống chế tất cả các ô của bàn cờ. Có hai bài toán sau đây được đặt ra:

*Bài toán 6.1.*Trên bàn cờ n x n cần đặt tối đa bao nhiêu con mã (xe, tượng, hậu) để chúng không ăn lẫn nhau. Có bao nhiêu cách đặt?

*Bài toán 6.2.*Trên bàn cờ n x n cần đặt tối thiểu bao nhiêu con mã (xe, tượng, hậu) để chúng khống chế được tất cả các ô còn lại của bàn cờ? Có bao nhiêu cách đặt?

Để giải quyết hai bài toán trên trước hết cần xây dựng đồ thị mô tả nước đi của các quân cờ.

Xây dựng các đồ thị tương ứng với nước đi của các quân cờ: mã, xe, tượng, hậu.

Xây dựng đồ thị G_M

Đỉnh: Ký hiệu các ô của bàn cờ theo dạng ma trận a_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$)

Lấy các điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với các ô của bàn cờ và dùng ngay ký hiệu các ô của bàn cờ để ghi trên các điểm tương ứng.

Cạnh: Con mã có nước đi là hai đầu mút của mỗi đường chéo hình chữ nhật 2 x 3 hoặc 3 x 2, nên cặp điểm bất kỳ, tương ứng với hai ô là đầu mút của đường chéo thuộc hình chữ nhật 2 x 3 hoặc 3 x 2 tuỳ ý đều được nối bằng một cạnh.

•		x
x		•

•	x
x	•

Đồ thị G_M mô tả toàn bộ nước đi của con mã trên bàn cờ $n \times n$.

Xây dựng đồ thị G_X:

Đỉnh: Tương tự như đồ thị G_M

Cạnh: Con xe có nước đi theo hàng ngang hoặc theo hàng dọc, nên mỗi cặp điểm tương ứng với hai ô nằm trên cùng một hàng ngang hoặc cùng một hàng dọc đều được nối bằng một cạnh.

Đồ thị nhận được ký hiệu bằng G_X. Đồ thị này mô tả toàn bộ các nước đi của con xe trên bàn cờ $n \times n$.

Xây dựng đồ thị G_T

Đỉnh: Tương tự như đồ thị G_M

Cạnh: Con tượng đi theo đường chéo của hình vuông tuỳ ý nên cặp điểm bất kỳ tương ứng với hai ô là đầu mút của đường chéo hình vuông tuỳ ý đều được nối bằng một cạnh.

Đồ thị nhận được ký hiệu bằng G_T. Đồ thị này mô tả toàn bộ các nước đi của con tượng trên bàn cờ $n \times n$.

Xây dựng đồ thị G_H

Đỉnh: Tương tự như đồ thị G_M

Cạnh: Con hậu có nước đi bao gồm nước đi của con xe và con tượng, nên cặp điểm tuỳ ý tương ứng với hai ô hoặc nằm trên một hàng ngang hoặc nằm trên một hàng dọc hoặc là đầu mút của một đường chéo thuộc hình vuông tuỳ ý đều được nối bằng một cạnh.

Đồ thị nhận được ký hiệu bằng G_H. Đồ thị này mô tả toàn bộ các nước đi của con hậu trên bàn cờ $n \times n$.

Lý luận để suy ra đáp án: Đáp án bài toán 6.1: Hai quân cờ không ăn lẫn nhau khi và chỉ khi chúng không đứng ở hai ô thuộc cùng một nước đi. Mặt khác hai đỉnh bất kỳ không kề nhau khi và chỉ khi chúng tương ứng với hai ô không thuộc cùng một nước đi.

Bởi vậy: Số con mã (xe, tượng, hậu) tối đa có thể đặt trên bàn cờ $n \times n$ để chúng không ăn lẫn nhau bằng số ổn định trong của đồ thị G_M (G_X, G_T, G_H) tức là bằng $\alpha(G_M)$ ($\alpha(G_X)$, $\alpha(G_T)$, $\alpha(G_H)$). Số cách đặt bằng số tập ổn định trong có lực lượng bằng số ổn định trong của đồ thị tương ứng.

Đáp án bài toán 6.2: Mỗi quân cờ đều khống chế được tất cả các ô, mà mỗi ô này lập với mỗi ô nó đứng thành một nước đi. Mặt khác mỗi ô của bàn cờ đều tương ứng với một đỉnh hoặc thuộc một tập ổn định ngoài nào đó hoặc kề với ít nhất một đỉnh thuộc tập ổn định ngoài, nên số con mã (xe, tượng, hậu) tối thiểu cần đặt trên bàn cờ n x n để chúng khống chế được toàn bộ các ô còn lại của bàn cờ bằng số ổn định ngoài của đồ thị G_M (G_X, G_T, G_H) tức là bằng $\beta(G_M)$ ($\beta(G_X)$, $\beta(G_T)$, $\beta(G_H)$). Số cách đặt bằng số tập ổn định ngoài có lực lượng bằng số ổn định ngoài của đồ thị tương ứng.

IV. Xét bàn cờ thực tế.

Khi n = 8 ta được bàn cờ 8 x 8. Đây là bàn cờ thường dùng, người ta gọi là bàn cờ. Khi đó bài toàn 6.1 và 6.2 trở thành hai câu hỏi rất thông dụng.

1. Có thể đặt tối đa bao nhiêu con mã (xe, tượng, hậu) trên bàn cờ để chúng không ăn lẫn nhau?

2. Cần đặt tối thiểu bao nhiêu con mã (xe, tượng, hậu) để chúng khống chế được toàn bộ bàn cờ.

Đầu tiên giải đáp câu hỏi thứ nhất, sau đó giải đáp câu hỏi thứ hai đối với từng loại quân cờ.

1. Số quân cờ tối đa có thể đặt:

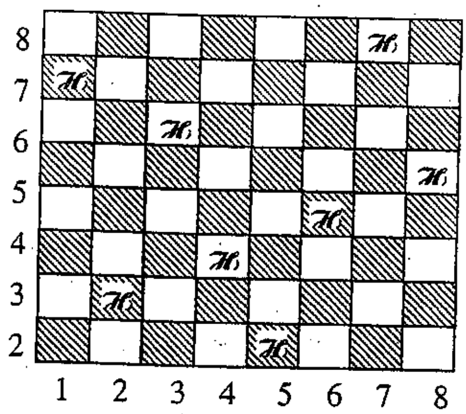
Dùng a_{ij} $(1 \le i, j \le 8)$ để ký hiệu ô đứng ở hàng i, cột j của bàn cờ.

1) Đồ thị G_M có số ổn định trong $\alpha(G_M) = 24$, nên chỉ có thể đặt tối đa 24 con mã, thì chúng không ăn lẫn nhau. Chẳng hạn, có thể đặt 24 con mã ở các ô a_{1j}, a_{4j}, a_{7j} với $(1 \le j \le 8)$.

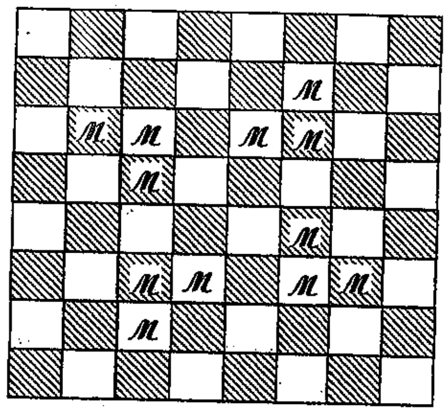
2) Đồ thị G_X có số ổn định trong $\alpha(G_X) = 8$, nên chỉ có thể đặt tốt đa 8 con xe, thì chúng không ăn lẫn nhau. Chẳng hạn, có thể đặt 8 con xe ở các ô a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, a_{66}, a_{77}, a_{88}.

3) Đồ thị G_T có số ổn định trong $\alpha(G_T) = 14$, nên chỉ có thể đặt tối đa 14 con tượng, thì chúng không ăn lẫn nhau. Chẳng hạn, có thể đặt 14 con tượng ở các ô a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{82}, a_{83}, a_{84}, a_{85}, a_{86}, a_{87}.

4) Đồ thị G_H có số ổn định trong $\alpha(G_H) = 8$, nên chỉ có thể đặt tối đa 8 con hậu, thì chúng không ăn lẫn nhau. Chẳng hạn, có thể đặt 8 con hậu tại các ô a_{17}, a_{21}, a_{33}, a_{48}, a_{56}, a_{64}, a_{72}, a_{85}. (Hình H 6.3)



H 6.3



H 6.4

Về số cách đặt 8 con hậu lúc đầu Gauss tưởng có 76 cách. Năm 1854 tờ báo về cờ ở Beclin "Schaczeitung" đưa ra được 40 cách, nhưng thực tế đồ thị G_H có 92 tập ổn định trong với lực lượng bằng 8. Bởi vậy có tất cả 92 cách đặt 8 con hậu trên bàn cờ 8 x 8 để chúng không ăn lẫn nhau. Đặt như 12 sơ đồ sau đây:

(72631485) (61528374) (58417263) (35841726) (46152837)
(57263148) (16837425) (57263184) (48157263) (51468273)
42751863) (35281746)

Mỗi sơ đồ như trên (H 6.3) tương ứng với một hoán vị và từ mỗi sơ đồ ta suy ra 8 cách đặt khác nhau: 3 cách đặt bằng cách quay 90°, 180°, 270°.

Các lời giải khác suy được bằng cách đối xứng mỗi sơ đồ nhận được qua đường chéo chính.

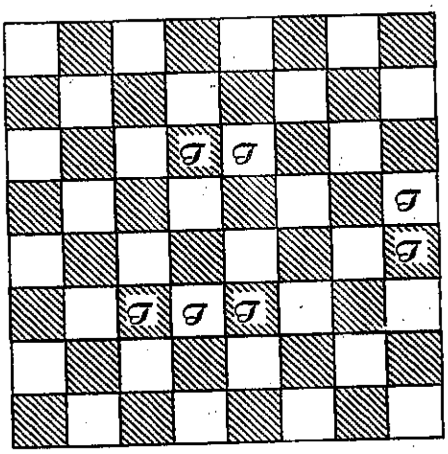
Hoán vị cuối cùng chỉ cho 4 lời giải vì sơ đồ tương ứng sẽ trùng với chính nó sau khi quay 180°.

2.Số quân cờ tối thiểu cần đặt.

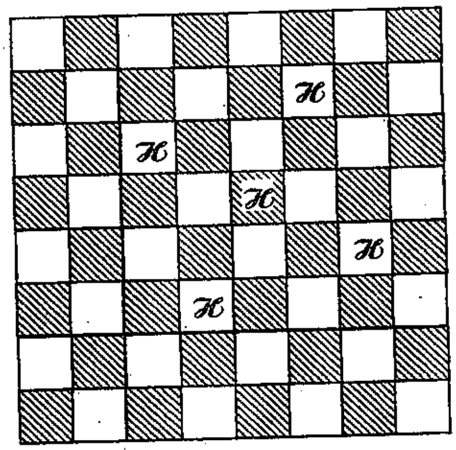
Với n = 8 số ổn định ngoài của đồ thị G_M bằng 12, nên chỉ cần đặt 12 con mã trên các ô tương ứng với các đỉnh thuộc một tập ổn định ngoài, thì sẽ khống chế được tất cả các ô của bàn cờ. Hình 6.4 biểu diễn một trong những cách đặt cần tìm.

Với n = 8 đồ thị G_X có số ổn định ngoài bằng 8, nên chỉ cần đặt 8 con xe trên các ô nằm trên một đường chéo, thì chúng sẽ khống chế được tất cả bàn cờ.

Với n = 8 đồ thị G_T có số ổn định ngoài bằng 8, nên chỉ cần đặt 8 con tượng trên các ô tương ứng với các đỉnh thuộc một tập ổn định ngoài thì sẽ khống chế được tất cả các ô của bàn cờ. Hình H 6.5 biểu diễn một trong những cách đặt cần tìm.



H 6.5



H 6.6

Bài toán 5 con hậu chính là trường hợp đặc biệt của bài toán 6.2 khi n = 8. Với n = 8 đồ thị G_H có số ổn định ngoài bằng 5, nên chỉ cần 5 con hậu bố trí trên các ô tương ứng với một tập ổn định ngoài có lực lượng bằng 5, thì chúng sẽ khống chế được tất cả các ô của bàn cờ. Hình H 6.6 biểu diễn một trong những cách đặt cần tìm.

Về một vài dãy truy hồi

Đàm Văn Nhỉ, ĐHSP Hà Nội

1 Dãy truy hồi qua cấp số nhân

Mục này bàn về cách sử dụng cấp số nhân để xét một vài dãy truy hồi. Giả sử các dãy truy hồi $(x_n), (y_n)$ và (z_n) được xác định như sau:

(1) Hoặc $x_0 = a, x_1 = b$ và $x_{n+2} = ux_{n+1} + vx_n$ với $n \geqslant 0$.

(2) Hoặc $\begin{cases} x_0 = a, y_0 = b \\ x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n, n \geqslant 0. \end{cases}$

(3) Hoặc $\begin{cases} x_0 = a, y_0 = b, z_0 = c \\ x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n + a_{13}z_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n + a_{23}z_n \\ z_{n+1} = a_{31}x_n + a_{32}y_n + a_{33}z_n, n \geqslant 0. \end{cases}$

Vấn đề đặt ra: Phát hiện tính chất của các dãy số.

1.1 Phương pháp cấp số nhân để xét dãy số

Ta bắt đầu bằng việc xét hai dãy (x_n) và (y_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_0 = a, y_0 = b \\ x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n, n \geqslant 0. \end{cases}$$

Khi đó $x_{n+1} + ty_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n + t\big(a_{21}x_n + a_{22}y_n\big), n \geqslant 0$ hay

$$x_{n+1} + ty_{n+1} = (a_{11} + ta_{21})x_n + (a_{12} + ta_{22})y_n, n \geqslant 0.$$

Xác định t thỏa mãn phương trình $(a_{11} + ta_{21})t = (a_{12} + ta_{22})$ và ta có $x_{n+1} + ty_{n+1} = (a_{11} + ta_{21})(x_n + ty_n), n \geqslant 0$.

Ví dụ 1. Cho dãy số nguyên (a_n) xác định như sau: $a_0 = 1, a_1 = 4$ và $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$ với $n \geqslant 0$. Khi đó hãy

(i) Tính a_n theo n.

(ii) Chứng minh $a_n^2 + a_{n-1}^2 - 4a_na_{n-1} = 1$ với mọi số nguyên $n \geqslant 1$.

Bài giải: Đặt $x_n = a_n$ và $y_n = a_{n-1}$ với mọi $n \geqslant 1$. Khi đó

$$\begin{cases} x_1 = 4, y_1 = 1 \\ x_{n+1} = 4x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n, n \geqslant 1. \end{cases}$$

Do $x_{n+1} + ty_{n+1} = 4x_n - y_n + tx_n = (4+t)x_n - y_n$ nên ta sẽ chọn t sao cho $(4+t)t = -1$. Từ đó $t_1 = -2+\sqrt{3}$ và $t_2 = -2-\sqrt{3}$. Biểu diễn $x_{n+1} + ty_{n+1} = (4+t)(x_n + ty_n)$ và suy ra

$$x_{n+1} + ty_{n+1} = (4+t)^n(x_1 + ty_1).$$

Thay $t = -2+\sqrt{3}$ và $t = -2-\sqrt{3}$ được hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_n + (-2+\sqrt{3})y_n = (2+\sqrt{3})^n \\ x_n + (-2-\sqrt{3})y_n = (2-\sqrt{3})^n. \end{cases}$$

Vậy $a_n = y_{n+1} = \dfrac{(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}$ với mọi $n \geqslant 0$.

(ii) Vì $\begin{cases} a_n + (-2+\sqrt{3})a_{n-1} = (2+\sqrt{3})^n \\ a_n + (-2-\sqrt{3})a_{n-1} = (2-\sqrt{3})^n \end{cases}$ nên $\left[a_n + (-2+\sqrt{3})a_{n-1}\right]\left[a_n + (-2-\sqrt{3})a_{n-1}\right] = 1$ hay $a_n^2 + a_{n-1}^2 - 4a_na_{n-1} = 1$ mọi số nguyên $n \geqslant 1$. □

Ví dụ 2. Dãy (a_n) xác định bởi $\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = -1 \\ a_{n+2} = 7a_{n+1} - 6a_n, n \geqslant 0. \end{cases}$ Hãy

(i) Xác định a_n theo n.

(ii) Chứng minh $a_{n+1}^2 - 7a_{n+1}a_n + 6a_n^2 = 14.6^n$ với mọi $n \geqslant 0$.

(iii) Chứng minh $a_n \not\vdots\, 10$ với mọi $n \geqslant 0$.

(iv) Chứng minh $a_{2012} + 13 \,\vdots\, 2011$.

Bài giải: (i) Đặt $b_n = a_{n-1}$ với mọi $n \geqslant 1$. Khi đó $\begin{cases} a_1 = -1, b_1 = 1 \\ a_{n+1} = 7a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = a_n, n \geqslant 0. \end{cases}$ Do $a_{n+1} + tb_{n+1} = 7a_n - 6b_n + ta_n = (7+t)a_n - 6a_n$ nên ta sẽ chọn t sao cho $(7+t)t = -6$. Từ đó $t_1 = -1$ và $t_2 = -6$. Xét $a_{n+1} + tb_{n+1} = (7+t)(a_n + tb_n)$ và có $a_{n+1} + tb_{n+1} = (7+t)^n(a_1 + tb_1)$. Thay $t = -1$ và $t = -6$ được hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} a_n - b_n = -2.6^{n-1} \\ a_n - 6b_n = -7. \end{cases}$$

Vậy $a_n = b_{n+1} = \dfrac{-2.6^n + 7}{5}$ với mọi $n \geqslant 0$.

(ii) Vì $\begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = -2.6^n \\ a_{n+1} - 6b_{n+1} = -7 \end{cases}$ nên $a_{n+1}^2 - 7a_n a_{n+1} + 6a_n^2 = 14.6^n$ mọi số nguyên $n \geqslant 0$.

(iii) Vì a_n luôn luôn là số nguyên lẻ nên $a_n \not\vdots\, 10$ với mọi $n \geqslant 0$.

(iv) Vì $5a_{2012} = -2.6^{2012} + 7$ nên $5a_{2012} \equiv -65 (\text{mod}\, 2011)$ hay $a_{2012} + 13 \,\vdots\, 2011$. □

Ví dụ 3. Dãy (a_n) được xác định như sau: $a_1 = 2011$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{4 + 7a_n}$ với mọi $n \geqslant 1$. Xác định a_n theo n và $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Bài giải: Đồng bậc hóa qua việc đặt $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}, n \geqslant 1$. Khi đó $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{v_n}{4v_n + 7u_n}, n \geqslant 1$.

Có thể chọn dãy $(u_n), (v_n)$ thỏa mãn $u_1 = 2011, v_1 = 1$ và $\begin{cases} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = 4v_n + 7u_n, n \geqslant 1. \end{cases}$

Xét $v_{n+1} + tu_{n+1} = 4v_n + 7u_n + tv_n = (4+t)v_n + 7u_n$. Chọn t sao cho $t(t+4) = 7$ hay t nhận $-2 \pm \sqrt{11}$ và $v_{n+1} + tu_{n+1} = (t+4)(v_n + tu_n) = \cdots = (t+4)^n(v_1 + tu_1)$ với mọi $n \geqslant 1$. Như thế $\begin{cases} v_n + t_1 u_n = (t_1+4)^{n-1}(1 + 2011t_1) \\ v_n + t_2 u_n = (t_2+4)^{n-1}(1 + 2011t_2) \end{cases}$ hay có biểu diễn

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{(t_1+4)^{n-1}(1+2011t_1) + (t_2+4)^{n-1}(1+2011t_2)}{t_1 - t_2} \\ v_n = \dfrac{-t_2(t_1+4)^{n-1}(1+2011t_1) + t_1(t_2+4)^{n-1}(1+2011t_2)}{t_1 - t_2}. \end{cases}$$

Ta có $a_n = \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{(t_1+4)^{n-1}(1+2011t_1) + (t_2+4)^{n-1}(1+2011t_2)}{-t_2(t_1+4)^{n-1}(1+2011t_1) + t_1(t_2+4)^{n-1}(1+2011t_2)}$ và được $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n =$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\dfrac{t_2+4}{t_1+4}\right)^{n-1}(1+2011t_2) + (1+2011t_1)}{t_1\left(\dfrac{t_2+4}{t_1+4}\right)^{n-1}(1+2011t_2) - t_2(1+2011t_1)} = \frac{1+2011t_1}{-t_1(1+2011t_1)} = \frac{1}{-t_2} = \frac{-2+\sqrt{11}}{7}.$$

□

Ví dụ 4. Dãy (a_n) được xác định như sau: $a_1 = 2011$, $a_{n+1} = \dfrac{2}{4 - 7a_n}$ với mọi $n \geqslant 1$. Xác định a_n theo n và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ có tồn tại không?

Bài giải: Đồng bậc hóa qua việc đặt $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}, n \geqslant 1$. Khi đó $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{2v_n}{4v_n - 7u_n}, n \geqslant 1$.

Có thể chọn dãy $(u_n), (v_n)$ thỏa mãn $u_1 = 2011, v_1 = 1$ và $\begin{cases} u_{n+1} = 2v_n \\ v_{n+1} = 4v_n - 7u_n, n \geqslant 1. \end{cases}$

Xét $v_{n+1} + tu_{n+1} = 4v_n - 7u_n + 2tv_n = (4+2t)v_n - 7u_n$. Chọn t sao cho $t(2t+4) = -7$ hay t nhận $\dfrac{-2 \pm i\sqrt{10}}{2}$ và $v_{n+1} + tu_{n+1} = (2t+4)(v_n + tu_n) = \cdots = (2t+4)^n(v_1 + tu_1)$ với mọi $n \geqslant 1$. Như thế $\begin{cases} v_n + t_1 u_n = (2t_1+4)^{n-1}(1+2011t_1) \\ v_n + t_2 u_n = (2t_2+4)^{n-1}(1+2011t_2) \end{cases}$ hay có biểu diễn $\begin{cases} u_n = \dfrac{(2t_1+4)^{n-1}(1+2011t_1)+(2t_2+4)^{n-1}(1+2011t_2)}{t_1-t_2} \\ v_n = \dfrac{-t_2(2t_1+4)^{n-1}(1+2011t_1)+t_1(2t_2+4)^{n-1}(1+2011t_2)}{t_1-t_2} \end{cases}$. Vậy $a_n = \dfrac{u_n}{v_n} =$ $\dfrac{(2t_1+4)^{n-1}(1+2011t_1)+(2t_2+4)^{n-1}(1+2011t_2)}{-t_2(2t_1+4)^{n-1}(1+2011t_1)+t_1(2t_2+4)^{n-1}(1+2011t_2)}$ và giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ không tồn tại. □

Ví dụ 5. Với hai số dương a, b, dãy (a_n) được xác định như sau: $a_1 = a$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+b}{2a_n}$ với mọi $n \geqslant 1$. Xác định a_n theo n và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Bài giải: Đồng bậc hóa qua việc đặt $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}, n \geqslant 1$. Khi đó $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \dfrac{u_n^2 - bv_n^2}{2u_nv_n}, n \geqslant 1$.

Có thể chọn dãy $(u_n), (v_n)$ thỏa mãn $u_1 = a, v_1 = 1$ và $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + bv_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_nv_n, n \geqslant 1 \end{cases}$ và được $\begin{cases} u_{n+1} + \sqrt{b}v_{n+1} = (u_n + \sqrt{b}v_n)^2 \\ u_{n+1} - \sqrt{b}v_{n+1} = (u_n - \sqrt{b}v_n)^2 \end{cases}$ hay có biểu diễn thành dạng $\begin{cases} u_{n+1} + \sqrt{b}v_{n+1} = (a+\sqrt{b})^{2^n} \\ u_{n+1} - \sqrt{b}v_{n+1} = (a-\sqrt{b})^{2^n} \end{cases}$ với $n \geqslant 0$. Như vậy ta có công thức tính $\begin{cases} u_n = \dfrac{(a+\sqrt{b})^{2^{n-1}} + (a-\sqrt{b})^{2^{n-1}}}{2} \\ v_n = \dfrac{(a+\sqrt{b})^{2^{n-1}} - (a-\sqrt{b})^{2^{n-1}}}{2\sqrt{b}}, n \geqslant 1. \end{cases}$ Số hạng tổng quát $a_n = \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{(a+\sqrt{b})^{2^{n-1}} + (a-\sqrt{b})^{2^{n-1}}}{(a+\sqrt{b})^{2^{n-1}} - (a-\sqrt{b})^{2^{n-1}}}\sqrt{b}, n \geqslant 1$. Ta nhận được giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \dfrac{(a-\sqrt{b})^{2^{n-1}}}{(a+\sqrt{b})^{2^{n-1}}}}{1 - \dfrac{(a-\sqrt{b})^{2^{n-1}}}{(a+\sqrt{b})^{2^{n-1}}}}\sqrt{b} = \sqrt{b}.$$ □

Ví dụ 6. Bộ ba số nguyên dương x, y, z được gọi là bộ ba Pythagore nếu $x^2+y^2=z^2$. Cho ba dãy số nguyên dương $(x_n), (y_n), (z_n)$ được xác định như sau: $\begin{cases} x_1 = 3, y_1 = 4, z_1 = 5 \\ x_{n+1} = 3x_n + 2z_n + 1 \\ y_{n+1} = 3x_n + 2z_n + 2 \\ z_{n+1} = 4x_n + 3z_n + 2, n \geqslant 1. \end{cases}$

(i) Chứng minh mỗi bộ (x_n, y_n, z_n) là một bộ ba Pythagore và $2x_ny_n + 1$ là một số chính phương.

(ii) Tính x_n, y_n, z_n theo n.

(iii) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{z_n}$.

Bài giải: (i) Ta có sự tương đương giữa hệ đã cho và hệ truy hồi sau đây:

$$\begin{cases} x_1 = 3, y_1 = 4, z_1 = 5 \\ x_{n+1} = 3x_n + 2z_n + 1 \\ z_{n+1} = 4x_n + 3z_n + 2 \\ y_{n+1} = x_{n+1} + 1, n \geqslant 1. \end{cases}$$

Đặt $x_n = t_n - \dfrac{1}{2}$ ta có hệ sau tương đương với hệ ban đầu:

$$\begin{cases} x_1 = 3, y_1 = 4, z_1 = 5 \\ t_{n+1} = 3t_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 4t_n + 3z_n \\ x_{n+1} = t_{n+1} - \dfrac{1}{2} \\ y_{n+1} = x_{n+1} + 1, n \geqslant 1. \end{cases}$$

Ta biểu diễn $t_{n+1}+\lambda z_{n+1} = (3+4\lambda)t_n+(2+3\lambda)z_n$. Chọn λ để sao cho $(2+3\lambda) = \lambda(3+4\lambda)$ hay $4\lambda^2 - 2 = 0$. Khi đó $\lambda_{1,2} = \dfrac{\pm\sqrt{2}}{2}$ và $t_{n+1} + \lambda z_{n+1} = (3+4\lambda)^n(t_1 + \lambda z_1)$. Với $\lambda = \lambda_{1,2}$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} t_{n+1} + \lambda_1 z_{n+1} = (3+4\lambda_1)^n(t_1 + \lambda_1 z_1), (1) \\ t_{n+1} + \lambda_2 z_{n+1} = (3+4\lambda_2)^n(t_1 + \lambda_2 z_1), (2). \end{cases}$$

Với (1).(2) ta có $2t_{n+1}^2 - z_{n+1}^2 = 2t_1^2 - z_1^2$. Vậy $z_{n+1}^2 = 2x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} + 1 = x_{n+1}^2 + (x_{n+1}+1)^2 = x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2$ và $2x_ny_n + 1 = z_n^2$ với mọi $n \geqslant 0$.
(ii) Từ (1) và (2) suy ra các công thức xác định $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ dưới đây:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\lambda_2(3+4\lambda_1)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_1) - \lambda_1(3+4\lambda_2)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\lambda_2(3+4\lambda_1)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_1) - \lambda_1(3+4\lambda_2)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ z_{n+1} = \dfrac{(3+4\lambda_1)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_1) - (3+4\lambda_2)^n(\frac{7}{2}+5\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, n \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{hay}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n(7+5\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})^n(7-5\sqrt{2})}{4} \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n(7+5\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})^n(7-5\sqrt{2})}{4} \\ z_{n+1} = \dfrac{(3+2\sqrt{2})^n(7+5\sqrt{2}) - (3-2\sqrt{2})^n(7-5\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}, n \geqslant 0. \end{cases}$$

Điều đặc biệt là dãy các số nguyên dương x_n, y_n, z_n được tính qua $\sqrt{2}$.
(iii) Dễ dàng suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{z_n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. □

Ví dụ 7. Ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ xác định bởi các phương trình sau:

$$\begin{cases} x_0 = 12, y_0 = 8, z_0 = 16 \\ x_n = 30x_{n-1} + 21y_{n-1} - 21z_{n-1} \\ y_n = 14x_{n-1} + 23y_{n-1} - 14z_{n-1} \\ z_n = 28x_{n-1} + 28y_{n-1} - 19z_{n-1}, n \geqslant 1. \end{cases}$$

Hãy chứng minh $x_n \vdots 2^{4n+2}, y_n \vdots 2^{4n+3}, z_n \vdots 2^{4n+4}$ và $x_n \not\vdots 2^{4n+3}$, $y_n \not\vdots 2^{4n+4}$, $z_n \not\vdots 2^{4n+5}$ với mọi $n \geqslant 0$.

Bài giải: Xét $x_n + ty_n = (30 + 14t)x_{n-1} + (21 + 23t)y_{n-1} - (21 + 14t)z_{n-1}$. Chọn t sao cho $21 + 23t = t(30 + 14t)$ hay $2t^2 + t - 3 = 0$ và như vậy $t = 1$ hoặc $t = -\frac{3}{2}$. Với $t = -\frac{3}{2}$ ta có $x_n - \frac{3}{2}y_n = 9(x_{n-1} - \frac{3}{2}y_{n-1})$ và suy ra $x_n - \frac{3}{2}y_n = 9^n(x_0 - \frac{3}{2}y_0) = 9^n(12 - \frac{3}{2}8) = 0$. Ta đã nhận được $x_n = \frac{3}{2}y_n$. Xét $y_n + uz_n = (14 + 28u)x_{n-1} + (23 + 28u)y_{n-1} - (14 + 19u)z_{n-1}$. Chọn u sao cho $(23 + 28u)u = -14 - 19u$ hay $28u^2 + 42u + 14 = 0$ và như vậy $u = -1$ hoặc $u = -\frac{1}{2}$. Với $u = -\frac{1}{2}$ ta có $y_n - \frac{1}{2}z_n = 9(y_{n-1} - \frac{1}{2}z_{n-1})$ và suy ra $y_n - \frac{1}{2}z_n = 9^n(y_0 - \frac{1}{2}z_0) = 9^n(8 - \frac{1}{2}16) = 0$. Ta nhận được $y_n = \frac{1}{2}z_n$. Tóm lại ta đã có $\begin{cases} x_n = \frac{3}{2}y_n \\ y_n = \frac{1}{2}z_n \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_n = \frac{3}{4}z_n \\ y_n = \frac{1}{2}z_n, n \geqslant 0. \end{cases}$ Quy nạp theo n dễ dàng suy ra $x_n = 12.16^n$, $y_n = 8.16^n, z_n = 16.16^n$. Tóm lại $x_n = 3.2^{4n+2}$, $y_n = 2^{4n+3}$ và $z_n = 2^{4n+4}$ thỏa mãn $x_n \vdots 2^{4n+2}, y_n \vdots 2^{4n+3}, z_n \vdots 2^{4n+4}$ và $x_n \not\vdots 2^{4n+3}$, $y_n \not\vdots 2^{4n+4}$, $z_n \not\vdots 2^{4n+5}$ với mọi $n \geqslant 0$. □

Ví dụ 8. Ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ xác định bởi các phương trình sau:

$$\begin{cases} x_0 = 4, y_0 = 2, z_0 = 1 \\ x_n = 20x_{n-1} + 36y_{n-1} + 3z_{n-1} \\ y_n = 12x_{n-1} + 26y_{n-1} + 2z_{n-1} \\ z_n = 6x_{n-1} + y_{n-1} + 25z_{n-1}, n \geqslant 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $x_n - y_n - z_n = 2^n$ và tính x_n, y_n, z_n theo n.

Bài giải: Xét $x_n + ty_n = (20 + 12t)x_{n-1} + (36 + 26t)y_{n-1} + (3 + 2t)z_{n-1}$. Chọn t sao cho $36 + 26t = t(20 + 12t)$ hay $2t^2 - t - 6 = 0$ và như vậy $t = 2$ hoặc $t = -\frac{3}{2}$. Với $t = -\frac{3}{2}$ ta có $x_n - \frac{3}{2}y_n = 2(x_{n-1} - \frac{3}{2}y_{n-1})$ và suy ra $x_n - \frac{3}{2}y_n = 2^n(x_0 - \frac{3}{2}y_0) = 2^n(4 - \frac{3}{2}.2) = 2^n$. Ta đã nhận được $x_n = \frac{3}{2}y_n + 2^n$. Xét $y_n + uz_n = (12 + 6u)x_{n-1} + (26 + u)y_{n-1} + (2 + 25u)z_{n-1}$. Chọn u sao cho $(26 + u)u = 2 + 25u$ hay $u^2 + u - 2 = 0$ và như vậy $u = 1$ hoặc $u = -2$. Với $u = -2$ ta có $y_n - 2z_n = 24(y_{n-1} - 2z_{n-1})$ và suy ra $y_n - 2z_n = 24^n(y_0 -$

$2z_0) = 24^n(2-2.1) = 0$. Ta nhận được $y_n = 2z_n$. Tóm lại ta đã có $\begin{cases} x_n = \frac{3}{2}y_n + 2^n \\ y_n = 2z_n \end{cases}$

hay $\begin{cases} x_n = 3z_n + 2^n \\ y_n = 2z_n \\ z_n = 45z_{n-1} + 3.2^n, n \geqslant 0. \end{cases}$ Xét hàm sinh $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n x^n$. Khi đó chúng ta có khai triển $f(x) = z_0 + (45z_0 + 3.2)x + (45z_1 + 3.2^2)x^2 + (45z_2 + 3.2^3)x^3 + \cdots + (45z_n + 3.2^{n+1})x^{n+1} + \cdots$. Như vậy $f(x) = 45xf(x) - 2 + 3\big[1 + (2x) + (2x)^2 + (2x)^3 + \cdots\big]$ và suy ra được $f(x) = \dfrac{-2}{1-45x} + \dfrac{3}{(1-2x)(1-45x)} = \dfrac{1}{43}\Big[\dfrac{49}{1-45x} - \dfrac{6}{1-2x}\Big]$. Khai triển thành chuỗi lũy thừa ta tìm được $z_n = \dfrac{49.45^n - 6.2^n}{43}$. Như vậy $x_n = \dfrac{147.45^n + 25.2^n}{43}$, $y_n = \dfrac{98.45^n - 12.2^n}{43}$, $z_n = \dfrac{49.45^n - 6.2^n}{43}$ và ta cũng có $x_n - y_n - z_n = 2^n$ với mọi số nguyên $n \geqslant 0$. □

1.2 Chuyển dãy truy hồi phức tạp về dãy đơn giản

Chúng ta xây dựng một vài dãy truy hồi và phát hiện tính chất nội tại xuất hiện trong đó qua việc làm mất độ phức tạp.

Ví dụ 9. Dãy $a_1 = 1, a_n = -1a_{n-1} + 2a_{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)a_1$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Khi đó ta có

(i) $a_2 = -1, a_3 + 3a_2 = 0, a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0, n \geqslant 2.$

(ii) Tìm dư của phép chia a_n cho 3.

(iii) Xác định a_n theo n. Hãy chỉ ra rằng có nhiều vô hạn số hạng thuộc dãy Fibonacci xuất hiện trong dãy (a_n).

(iv) $\sum\limits_{k=1}^{2n} C_{2n}^k a_{k+1} = F_{2n-1}$.

(v) $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 - 1$ với $n \geqslant 4$.

Bài giải: (i) Đặt $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$. Tích hai chuỗi lũy thừa

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x)\Big(-1x + 2x^2 - 3x^3 + \cdots\Big) \\ &= -1a_1x^2 + (-1a_2 + 2a_1)x^3 + (-1a_3 + 2a_2 - 3a_1)x^4 + \cdots \\ &= a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots = f(x) - x. \end{aligned}$$

Từ $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$ suy ra chuỗi lũy thừa sau:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{(1+x)^2} &= -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + 6x^5 - \cdots. \text{ Do đó ta được} \\ \frac{-x}{(1+x)^2} &= -1x + 2x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5x^5 + \cdots. \text{ Thế vào } F(x) \text{ có} \end{aligned}$$

$f(x)\Big(\dfrac{-x}{(1+x)^2}\Big) = f(x) - x$ hay $f(x)\Big[x^2+3x+1\Big] = x^3+2x^2+x$. Từ đồng nhất $\Big[a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\Big]\Big[x^2+3x+1\Big] = x^3+2x^2+x$ sẽ suy ra ngay $a_1 = 1, a_2+3a_1 = 2, a_3+3a_2 = 0, a_{n+2}+3a_{n+1}+a_n = 0, n \geqslant 2.$

(ii) Ta có $a_3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$. Vì $a_{n+2}+3a_{n+1}+a_n = 0$ nên $a_{n+2}+a_n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ khi $n \geqslant 2$.

Vậy, với số $k \geqslant 1$ có $\begin{cases} a_{2k+1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3) \\ a_{4k+2} \equiv a_2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3) \\ a_{4k} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3). \end{cases}$

(iii) Từ công thức đóng $f = \dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2+3x+1} = x - 1 + \dfrac{3x+1}{x^2+3x+1}$ có

$$f = x - 1 + \frac{3x+1}{\big(x + \frac{3+\sqrt5}{2}\big)\big(x+\frac{3-\sqrt5}{2}\big)} = x - 1 + \frac{1}{\sqrt5}\Big(\frac{u^2}{x-u} - \frac{v^2}{x-v}\Big)$$

với $u = \dfrac{-3-\sqrt5}{2}, v = \dfrac{-3+\sqrt5}{2}$. Vậy $f = x - 1 + \dfrac{1}{\sqrt5}\Big(\dfrac{u}{vx-1} - \dfrac{v}{ux-1}\Big)$ do $uv = 1$ và nhận được $f = x - 1 + \dfrac{1}{\sqrt5}\Big(\dfrac{v}{1-ux} - \dfrac{u}{1-vx}\Big)$. Viết thành chuỗi $f = x - 1 + \dfrac{v}{\sqrt5}(1 + ux + u^2x^2 + u^3x^3 + \cdots) - \dfrac{u}{\sqrt5}(1 + vx + v^2x^2 + v^3x^3 + \cdots)$ và nhận được công thức xác định

$a_n = \dfrac{u^{n-1}-v^{n-1}}{\sqrt5}$ hay $a_n = \dfrac{u^{n-1}-v^{n-1}}{\sqrt5} = (-1)^{n-1}\dfrac{\big(\frac{1+\sqrt5}{2}\big)^{2n-2} - \big(\frac{1-\sqrt5}{2}\big)^{2n-2}}{\sqrt5}$. Như vậy $a_n = (-1)^{n-1}F_{2n-1}$ với mọi $n \geqslant 2$.

(iv) Vì $\sum\limits_{k=1}^{2n} C_{2n}^k a_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt5}\sum\limits_{k=1}^{2n} C_{2n}^k\,[u^k - v^k] = \dfrac{(1+u)^{2n} - (1+v)^{2n}}{\sqrt5}$ nên $\sum\limits_{k=1}^{2n} C_{2n}^k a_{k+1} = \dfrac{\big(\frac{1+\sqrt5}{2}\big)^{2n} - \big(\frac{1-\sqrt5}{2}\big)^{2n}}{\sqrt5} = F_{2n-1}.$

(v) Ta có $a_2 = -1, a_3 = 3$ và $a_{n+2} = -3a_{n+1} - a_n$ với $n \geqslant 2$. Xét dãy (b_n) với $b_{n+1} = a_n, n \geqslant 2$. Khi đó

$$\begin{cases} a_3 = 3, b_3 = -1 \\ a_{n+1} = -3a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n, n \geqslant 3. \end{cases}$$

Xét $a_{n+1} + xb_{n+1} = (-3+x)a_n - b_n$. Chọn x thỏa mãn $(-3+x)x = -1$ hay $x = \dfrac{3 \pm \sqrt5}{2}$ ta sẽ có $a_{n+1} + xb_{n+1} = (-3+x)(a_n + xb_n) = \cdots = (-3+x)^{n-2}(a_3 + xb_3)$. Vậy

$$\begin{cases} a_{n+1} + \Big(\dfrac{3+\sqrt5}{2}\Big)a_n = \Big(-3 + \dfrac{3+\sqrt5}{2}\Big)^{n-2}\Big(3 - \big(\dfrac{3+\sqrt5}{2}\big)\Big) \\ a_{n+1} + \Big(\dfrac{3-\sqrt5}{2}\Big)a_n = \Big(-3 + \dfrac{3-\sqrt5}{2}\Big)^{n-2}\Big(3 - \big(\dfrac{3-\sqrt5}{2}\big)\Big). \end{cases}$$

Nhân hai phương trình, vế với vế, ta nhận được $a_{n+1}^2 + 3a_na_{n+1} + a_n^2 - 1 = 0$ với mỗi $n \geqslant 3$. Tương tự $a_{n-1}^2 + 3a_na_{n-1} + a_n^2 - 1 = 0$ với $n \geqslant 4$. Từ hai phương trình trên suy ra a_{n+1}, a_{n-1} là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 3a_nx + a_n^2 - 1 = 0$ và nhận được $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 - 1$ với $n \geqslant 4$. □

Ví dụ 10. Dãy (a_n) xác định qua $a_1 = 1$ và $a_n = 1a_{n-1} + 2a_{n-2} + \cdots + (n-1)a_1$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Chứng minh rằng

(i) $a_3 = 3a_2$ và $a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$ và xác định a_n theo n. Từ đó suy ra a_{2k+1} chia hết cho 3 khi $k \geqslant 1$.

(ii) $a_n = F_{2n-1}$, trong đó $F_0 = F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geqslant 0$.

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{2n} \mathrm{C}_{2n}^k\, a_{k+1}$ chia hết cho 5^n.

(iv) $(a_1a_3+1)(a_2a_4+1)(a_3a_5+1)\ldots(a_{n-1}a_{n+1}+1) = 4\prod\limits_{i=1}^{n} a_i^2$.

Bài giải: (i) Xét $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$. Khi đó ta có
$$f(x)(1x + 2x^2 + \cdots + nx^n + \cdots) = f(x) - x.$$
Từ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ta suy ra $1x + 2x^2 + \cdots = \dfrac{x}{(x-1)^2}$. Vậy $f(x) = x + \dfrac{x^2}{x^2 - 3x + 1}$ và được $f(x)(x^2 - 3x + 1) = x^3 - 2x^2 + x$. Nhân ra và so sánh hệ số của $x^n, n \geqslant 1$ ở hai vế, nhận được $a_1 = 1, a_2 = 1$, $a_3 = 3a_2$, và $a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Từ công thức đóng $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 1} = x + 1 + \dfrac{3x - 1}{x^2 - 3x + 1}$ có phương trình
$$f(x) = x + 1 + \frac{3x-1}{\left(x - \frac{3+\sqrt5}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt5}{2}\right)} = x + 1 + \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{a^2}{x-a} - \frac{b^2}{x-b}\right)$$
với $a = \dfrac{3+\sqrt5}{2}, b = \dfrac{3-\sqrt5}{2}$. Ta có $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{\sqrt5}\left(\dfrac{a}{bx-1} - \dfrac{b}{ax-1}\right)$ do $ab = 1$. Như vậy $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{\sqrt5}\left(\dfrac{b}{1-ax} - \dfrac{a}{1-bx}\right)$. Viết thành chuỗi $f(x) = x + 1 + \dfrac{b}{\sqrt5}(1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots) - \dfrac{a}{\sqrt5}(1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3 + \cdots)$ và nhận được công thức xác định $a_n = \dfrac{a^{n-1} - b^{n-1}}{\sqrt5}, n \geqslant 2$.
Từ $a_3 = 3a_2$ và $a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$ suy ra a_{2k+1} chia hết cho 3 khi $k \geqslant 1$.

(ii) Ta có $a_n = \dfrac{a^{n-1} - b^{n-1}}{\sqrt5} = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{2n-2} - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{2n-2}}{\sqrt5} = F_{2n-1}$.

(iii) Vì $\sum\limits_{k=1}^{2n} C_{2n}^k a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum\limits_{k=1}^{2n} C_{2n}^k [a^k - b^k] = \frac{(1+a)^{2n} - (1+b)^{2n}}{\sqrt{5}}$ nên $\sum\limits_{k=1}^{2n} C_{2n}^k a_{k+1} = 5^n \frac{(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}} = 5^n a_{n-1}$. Như vậy, ta nhận được kết quả: $\sum\limits_{k=1}^{2n} C_{2n}^k a_{k+1}$ chia hết cho 5^n.

(iv) Ta có $a_2 = 1, a_3 = 3$ và $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ với $n \geqslant 2$. Xét dãy (b_n) với $b_{n+1} = a_n, n \geqslant 2$. Khi đó

$$\begin{cases} a_3 = 3, b_3 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n, n \geqslant 3. \end{cases}$$

Xét $a_{n+1} + xb_{n+1} = (3+x)a_n - b_n$. Chọn x thỏa mãn $(3+x)x = -1$ hay $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ta sẽ có $a_{n+1} + xb_{n+1} = (3+x)(a_n + xb_n) = \cdots = (3+x)^{n-2}(a_3 + xb_3)$. Vậy

$$\begin{cases} a_{n+1} + \Big(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\Big)a_n = \Big(3 + \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-2}\Big(3 + (\frac{-3+\sqrt{5}}{2})\Big) \\ a_{n+1} + \Big(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\Big)a_n = \Big(3 + \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n-2}\Big(3 + (\frac{-3-\sqrt{5}}{2})\Big). \end{cases}$$

Nhân hai phương trình, vế với vế, ta nhận được $a_{n+1}^2 - 3a_na_{n+1} + a_n^2 - 1 = 0$ với mỗi $n \geqslant 3$. Tương tự $a_{n-1}^2 - 3a_na_{n-1} + a_n^2 - 1 = 0$ với $n \geqslant 4$. Từ hai phương trình trên suy ra a_{n+1}, a_{n-1} là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3a_nx + a_n^2 - 1 = 0$ và nhận được $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 - 1$ với $n \geqslant 4$. Từ đồng nhất thức $a_{n+1}a_{n-1} + 1 = a_n^2$ với $n \geqslant 4$ ta suy ra tích dưới đây

$$T = (a_1a_3 + 1)(a_2a_4 + 1)(a_3a_5 + 1)\dots(a_{n-1}a_{n+1} + 1)$$

bằng $T = 4.a_3^2a_4^2 \dots a_n^2 = 4\prod\limits_{i=1}^{n} a_i^2$. □

Ví dụ 11. Dãy (a_n) xác định qua $a_1 = 1$ và $a_n = 1.2.a_{n-1} + 2.3.a_{n-2} + \cdots + (n-1).n.a_1$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Chứng minh rằng, khi $n \geqslant 1$ có

$$a_{n+3} = 5a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n.$$

Bài giải: Xét $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$. Khi đó ta có hệ thức

$$f(x)(1.2.x + 2.3.x^2 + \cdots + n.(n+1).x^n + \cdots) = f(x) - x.$$

Từ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ta suy ra $1x^2 + 2x^3 + \cdots = \frac{x^2}{(x-1)^2}$. Lấy đạo hàm hai vế có $1.2.x + 2.3.x^2 + \cdots = \frac{-2x}{(x-1)^3}$. Vậy $f(x) = x + \frac{-2x^2}{x^3 - 3x^2 + 5x - 1}$. Từ $f(x)(x^3 - 3x^2 + 5x - 1) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$ ta nhận ra và so sánh hệ số của $x^n, n \geqslant 4$ ở hai vế, nhận được $a_{n+3} = 5a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Biểu diễn các mối quan hệ trong bảng hệ thức

$$\begin{cases} -a_1 = -1 \\ -a_2 + 5a_1 = 3 \\ -a_3 + 5a_2 - 3a_1 = -3 \\ -a_4 + 5a_3 - 3a_2 + a_1 = 1 \\ -a_5 + 5a_4 - 3a_3 + a_2 = 0 \\ -a_6 + 5a_5 - 3a_4 + a_3 = 0 \\ \dots \\ -a_n + 5a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} = 0 \\ -a_{n+1} + 5a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \\ -a_{n+2} + 5a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1} = 0 \\ -a_{n+3} + 5a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0. \end{cases}$$

Vậy $a_{n+3} = 5a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$ với mọi $n \geqslant 1$. □

Ví dụ 12. Dãy (a_n) xác định qua $a_1 = 1$ và $a_n = 1.2.a_{n-1} - 2.3.a_{n-2} + \cdots + (-1)^n(n-1).n.a_1$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Chứng minh $a_{n+3} + a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$ khi $n \geqslant 0$.

Bài giải: Xét $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$. Khi đó ta có hệ thức

$$f(x)(1.2.x - 2.3.x^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n.(n+1).x^n + \cdots) = f(x) - x.$$

Từ $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ ta suy ra $-1 + 2x - 3x^2 + \cdots = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Lấy đạo hàm hai vế có $1.2.x - 2.3.x^2 + \cdots = \dfrac{2x}{(x+1)^3}$ và như vậy nhận được $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x}{x^3 + 3x^2 + x + 1}$. Từ $f(x)(x^3 + 3x^2 + x + 1) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$ ta nhân ra và so sánh hệ số của $x^n, n \geqslant 4$ ở hai vế, được $a_1 = 1, a_2 = 2$, và $a_3 = -2$, $a_4 + a_3 + 3a_2 = 0, a_{n+3} + a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Biểu diễn các mối quan hệ trong bảng hệ thức sau:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 + a_1 = 3 \\ a_3 + a_2 + 3a_1 = 3 \\ a_4 + a_3 + 3a_2 + a_1 = 1 \\ a_5 + a_4 + 3a_3 + a_2 = 0 \\ a_6 + a_5 + 3a_4 + a_3 = 0 \\ \dots \\ a_n + a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 0 \\ a_{n+1} + a_n + 3a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \\ a_{n+2} + a_{n+1} + 3a_n + a_{n-1} = 0 \\ a_{n+3} + a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0. \end{cases}$$

□

Ví dụ 13. Xét dãy $a_1 = 1, a_n = 1^2a_{n-1} + 2^2a_{n-2} + \cdots + (n-1)^2a_1$ với mọi số nguyên $n \geqslant 2$. Khi đó $\begin{cases} a_2 = 4a_1 - 3, a_3 = 4a_2 - 2a_1 + 3 \\ a_{n+3} = 4a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n, n \geqslant 1. \end{cases}$

Bài giải: Đặt $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$. Khi đó tích hai chuỗi

$$\begin{aligned} & f(x)\Big(1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots\Big) \\ = \;& 1^2a_1x^2 + (1^2a_2 + 2^2a_1)x^3 + (1^2a_3 + 2^2a_2 + 3^2a_1)x^4 + \cdots \\ = \;& a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots = f(x) - x. \end{aligned}$$

Từ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$ ta suy ra chuỗi lũy thừa $\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \cdots$. Do đó nhận được $\dfrac{x}{(1-x)^2} = 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6 + \cdots$ và có biểu diễn $\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3} = 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + 5^2x^5 + 6^2x^6 + \cdots$. Vậy $f(x)\Big(\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}\Big) = f(x) - x$ hay $f(x)\Big[x^3 - 2x^2 + 4x - 1\Big] = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$. Từ đồng nhất $\Big[a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\Big]\Big[x^3 - 2x^2 + 4x - 1\Big] = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$ suy ra $a_3 = 4a_2 - 2a_1 + 3, a_{n+3} = 4a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ với mọi $n \geqslant 1$. □

Tài liệu

[1] W. Grobner, *Matrizenrechnung*, Bibliographisches Institut AG, Mannheim 1966.

[2] R. Merris, *Combinatorics*, PWS publishing company 20 Park Plaza, Boston, MA 02116-4324.

[3] Đ. V. Nhỉ, Ma trận vuông và dãy số, Bản tin Dạy và Học trong nhà trường ĐHSP Hà Nội số 2 2012.

[4] Đ. V. Nhỉ và L. B. Thắng, Chuỗi lũy thừa hình thức và ứng dụng, Tạp chí Khoa học ĐHSP Hà Nội 6 2006, 49-57.

[5] K. H. Wehrhahn, *Combinatorics-An Introduction*, Carslaw Publications 1992.

Bất đẳng thức xoay vòng Shapiro và bài toán bốn nhăm năm

Nguyễn Minh Tuấn
Trường Đại học Giáo dục, ĐHQG Hà Nội

Tóm tắt nội dung

Trong báo cáo này chúng tôi đề cập đến bất đẳng thức xoay vòng Shapiro, chứng minh cho các trường hợp $n = 3, 4, 5, 6$, trình bày một mở rộng của bất đẳng thức này cho bốn và năm biến, và đưa ra một số hướng mở rộng cho bất đẳng thức xoay vòng Shapiro nổi tiếng đó.

1 Câu chuyện lịch sử

Năm 1954 Harold Seymour Shapiro [17] đề xuất một bất đẳng thức tổng xoay vòng cho n biến như sau

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geq\frac{n}{2}, \tag{1.1}$$

ở đó $x_i \geq 0$, $x_i + x_{i+1} > 0$ và $x_{i+n} = x_i$ với $i \in \mathbb{N}$.[1] Mặc dù bài toán (1.1) đã được giải quyết trọn vẹn vào năm 1989 bởi Troesch [19], nhưng những dư âm của nó vẫn đang lan tỏa mạnh mẽ trong cộng đồng những người yêu thích toán học.

Thật vậy, bất đẳng thức (1.1) đã trải qua một lịch sử bốn mươi nhăm năm mới được chứng minh một cách trọn vẹn bởi sự hợp tác chặt chẽ của nhiều nhà toán học xuất sắc. V. G. Drinfeld là nhà toán học Nga nhận giải thưởng toán học Field đã có đóng góp nhất định trong việc chứng minh và hoàn chỉnh bất đẳng thức này. Hơn nữa, kể từ năm 1989 trở lại đây, nhiều bài báo đăng trên các tạp chí quốc tế uy tín thường xuyên xuất hiện ở đó đề cập đến những mở rộng và phát triển của (1.1). Có thể nói rằng, (1.1) là một trong số lượng không nhiều các bất đẳng thức đã lôi cuốn được số lượng rất lớn và đa dạng những người quan tâm và nghiên cứu: từ học sinh phổ thông trung học, sinh viên các trường đại học, những người nghiên cứu toán học nghiệp dư, những giáo viên dạy toán phổ thông, đến những nhà toán học chuyên nghiệp; những phép chứng minh và bình luận liên quan đến (1.1) được đăng tải trên các tờ báo tường của các trường phổ thông, các diễn đàn toán học trên

[1]Thực ra, A. M. Nesbitt [13] đã xét bất đẳng thức cho trường hợp ba biến từ năm 1903. Tuy nhiên, tác giả không đề xuất *tổng xoay vòng cho số lượng biến lớn hơn*. Có thể vì đó, các nghiên cứu tiếp theo liên quan đến bất đẳng thức (1.1) chỉ dẫn Shapiro như là tác giả khởi nguồn.

trên internet, các thông tin khoa học và tạp chí của các trường đại học, và cả trên các tạp chí toán học uy tín trên toàn thế giới. Vậy là, lịch sử của các chứng minh bất đẳng thức này đã được quan tâm trong một thời gian dài; tính chính xác, chặt chẽ của bài toán vẫn giữ nguyên, và sức ảnh hưởng của nó đã lan truyền sâu rộng trong cộng đồng toán học (xem [1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 22]).

Để thuận tiện trong các diễn giải, ta ký hiệu $P(n)$ là bất đẳng thức (1.1) được xem như là một mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên n.

Những nỗ lực của con người để tìm ra lời giải bài toán trên, theo thời gian, có thể được tổng kết như dưới đây (xem Bushell [2, 3]).

1. Năm 1956, Lighthill [9] xây dựng một phản ví dụ cho $n = 20$. Cụ thể, ký hiệu

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x), \tag{1.2}$$

trong đó

$$a_i(x) = \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}},$$
$$x_i = x_{i+n},$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Bằng cách chọn

$$c = (1, 1, \ldots, 1),$$
$$d = (5, 6, 4, 5, 3, 4, 2, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5)$$

tác giả [9] chứng minh được đẳng thức sau

$$E(c + \varepsilon d) = 10 - \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

ở đây $O(\varepsilon^3)$ là vô cùng bé cùng cấp với ε^3. Từ đẳng thức vừa nêu suy ra

$$10 - \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) < 10$$

khi ε đủ nhỏ. Do đó, khi ε gần không (tức là đủ bé) thì

$$E(c + \varepsilon d) < 10.$$

Vậy, $P(20)$ là sai.

Tổng biên tập tạp chí AMM [2] lúc đó đã nói rằng ông nhận được chín phép chứng minh cho trường hợp tổng quát, và quả quyết đã có những phép chứng minh chỉ cho $n = 3$ và $n = 4$, mặc dù Phelps có một phép chứng minh không được công bố cho $n = 5$ (xem [2, 3]).

[2] Journal of American Matheatical Monthly.

2. Năm 1958, Lighthill chỉ ra rằng $P(n)$ sai với những n chẵn lớn hơn hoặc bằng 14 ($n \geq 14$), và Rankin chứng minh được $P(n)$ sai với những n lẻ đủ lớn. Đúng một năm sau, năm 1959, Zulauf chứng minh được rằng $P(53)$ là sai. Có lẽ vì kết quả của của Lighthill mà những phép chứng minh cho n chẵn còn lại (n chẵn nhỏ hơn hoặc bằng 12) xuất hiện rất thưa thớt vào thời điểm đó: $P(6)$ được chứng minh bởi Diananda trong năm 1959, $P(8)$ được chứng minh bởi Djokovic vào năm 1963.

3. Năm 1963, Diananda [6] đưa ra một phản ví dụ cho $P(27)$. Cụ thể, tác giả chứng minh được rằng nếu

$$c = (0, 7, 0, 8, 0, 9, 0, 10, 0, 11, 1, 12, 3, 11, 5, 9, 6, 7, 6, 5, 6, 3, 6, 2, 6, 1, 6)$$

thì

$$E(c) = 13.4990440 < 27/2.$$

Cùng năm này, Diananda chứng minh được điều tuyệt vời sau đây:

- Nếu k_0 là số tự nhiên chẵn và nếu $P(k_0)$ đúng, thì $P(n)$ sẽ đúng với $n \leq k_0$.
- Nếu k_0 là số tự nhiên lẻ và nếu $P(k_0)$ sai, thì $P(n)$ sẽ sai với $n \geq k_0$.

Như vậy, tham chiếu điều này và kết quả của Lighthill năm 1958 và Diananda năm 1963, các nhà toán học thời đó đã biết rằng $P(n)$ sai với mọi n chẵn lớn hơn hay bằng 14, và $P(n)$ sai với mọi n lẻ lớn hơn 25. Vào thời điểm đó, những giá trị còn lại của n vẫn là một thách thức lớn.

4. Năm 1968. Nowosad [14] đưa ra ý tưởng *biên chính quy* để tìm cực tiểu của $E(x)$ được xác định bởi (1.2), và đã thành công cho $n = 10$. Cụ thể, ký hiệu

$$K := \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k \geq 0 \;\text{ với mọi }\; k = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Nói cách khác, K là một chóp trong không gian $\mathbb{R}^n$ gồm hợp tất cả các *phần tử không âm*. Ký hiệu ∂K, $\overset{\circ}{K}$ lần lượt là tập hợp tất cả các điểm biên, các điểm trong của tập hợp K.

Ta gọi biên chính quy của K, ký hiệu là $\operatorname{reg}\partial K$ là tập hợp tất cả các điểm biên của K (các điểm thuộc ∂K) sao cho mỗi phân số trong $E(x)$ đều được xác định, nghĩa là

$$\operatorname{reg}\partial K := \left\{x \in \mathbb{R}^n : x_k + x_{k+1} > 0 \;\text{ với mọi }\; k = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Tác giả [14] đã chứng minh được rằng $E(x)$ đạt được cực tiểu toàn cục ở trong $\overset{\circ}{K}$ hoặc tại $\operatorname{reg}\partial K$. Hơn nữa, tác giả chỉ ra rằng nếu giá trị cực tiểu toàn cục đó xảy ra ở $\overset{\circ}{K}$ thì nó bằng $\frac{n}{2}$. Bằng cách nghiên cứu những thành phần của biên chính quy $\operatorname{reg}\partial K$, tác giả chứng minh được $P(10)$ là đúng.

Sự kiện trên có thể xem là một cố gắng cuối cùng của con người trong chứng minh (1.1) bằng *bút chì và giấy*, trước khi bài toán được khép lại vào năm 1989. Cần phải nhấn mạnh rằng bài báo của Nowosad [14] có độ dài là 64 trang, đăng tải trên một tạp chí toán học có uy tín rất lớn trên thế giới.

5. Năm 1971, sử dụng máy tính điện tử thời kỳ đó làm công cụ tính toán, Daykin xây dựng một phản ví dụ cho $n = 25$. Bốn năm sau, năm 1975, Bushell và Craven cải tiến ví dụ của Daykin và dự đoán rằng $P(23)$ vẫn còn đúng.
   Như vậy, $P(n)$ đúng với mọi $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, và sai với mọi n chẵn lớn hơn hay bằng 14 ($n = 14, 16, 18, \ldots$), và $P(n)$ sai với mọi n lẻ lớn hơn hay bằng 25 ($n = 25, 27, 29, \ldots$). Thời điểm đó, người ta dự đoán rằng $P(n)$ đúng với những n còn lại.

6. Năm 1976, sử dụng đồng thời hai phương pháp là chứng minh giải tích và tính toán số, Godunova và Levin phát triển ý tưởng của Nowosad về biên chính quy và đã thành công trong việc chứng minh cho $P(12)$.

7. Số lượng các thành phần rời nhau của biên chính quy $\mathrm{reg}\,\partial K$ tăng lên rất nhanh theo n: chẳng hạn, đó là 30 khi $n = 12$, và bằng 2786 khi $n = 23$ (xem [2, 8]). Bởi vậy, nghiên cứu $E(x)$ khi x chỉ xác định trên biên chính quy của chóp K cũng là vấn đề khó khăn. Tuy vậy, vào năm 1989, Troesch [19] dựa trên những tính toán của máy tính đặc biệt thời đó đã trình bày một bằng chứng rất thuyết phục rằng $P(n)$ đúng với n chẵn không vượt quá 12 ($n \le 12$), và $P(n)$ đúng với n lẻ không vượt quá 23 ($n \le 23$), và sai với những trường hợp còn lại. Tác giả nhận xét rằng những phép chứng minh *giải tích và đại số* mới chỉ có với những giá trị $n = 3, 4, 6, 8$. Thực ra, đã có thêm một phép chứng minh trực tiếp khác của Bushell vẫn cho $n = 10$ vào năm 1992. Năm 2002, Bushell và McLeod [3] cho một phép chứng minh khác nữa cho trường hợp $n = 12$.

Có thể nói rằng, trong khoảng chục năm đầu tiên (từ 1954 đến 1963) có nhiều nỗ lực nhằm xây dựng những *phản ví dụ* với n lớn, và những phép *chứng minh cho* $P(n)$ khi n nhỏ. Sau giai đoạn nói trên (từ 1963 đến 1989) là những phép chứng minh mang tính đột phá cho bất đẳng thức này.

Để đơn giản cách trình bày các số liệu phục vụ cho ví dụ phản chứng, ta đưa ra ký hiệu sau đây:

$$S(A_n) := \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \cdot + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2},$$
$$A_n := (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Các ví dụ của vector $A_n \in \mathbb{R}^n$ dưới đây là phản ví dụ cho $P(n)$ tương ứng với n là số biến của bất đẳng thức.

$A_{14} = (0, 42, 2, 42, 4, 41, 5, 39, 4, 38, 2, 38, 0, 40)$

$$
\begin{aligned}
A_{14} &= (0, 44, 2, 44, 4, 43, 5, 41, 4, 40, 2, 40, 0, 42) \\
A_{25} &= (25, 0, 29, 0, 34, 5, 35, 13, 30, 17, 24, 18, 18, 17, 13, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 16, 9, 16, 5, 16, 2, 18, 0, 21, 0) \\
A_{27} &= (3, 6, 2, 6, 1, 6, 0, 7, 0, 8, 0, 9, 0, 10, 0, 11, 1, 12, 3, 11, 5, 9, 6, 7, 6, 5, 6) \\
A_{27} &= (3, 5, 2, 5, 1, 5, 0, 6, 0, 7, 0, 8, 0, 9, 0, 10, 1, 11, 3, 10, 5, 8, 5, 6, 5, 4, 5)
\end{aligned}
$$

Cụ thể, bảng B1 trang 92 cho ta thấy rằng với n tương ứng bằng 14, 25, và 27, hiệu số

$$S(A_n) - \frac{n}{2}$$

là âm. Từ đó suy ra $P(n)$ là sai với $n = 14, 25, 27$.

Chú ý rằng, nếu xem $S(A_n)$ như là hàm số của n biến

$$A_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

thì S là hàm liên tục. Bởi vậy, do

$$S(A_n) - \frac{n}{2} < 0$$

tại các điểm A_n như chỉ ra trong bảng số liệu B1, nên tồn tại lân cận của điểm A_n để hiệu

$$S(A_n) - \frac{n}{2} < 0$$

với mọi A_n thuộc lân cận đó (nếu tọa độ nào đó bằng không thì ta chỉ xét nửa dương của lân cận của tọa độ đó).

Như vậy, ta có khẳng định sau đây.

Khẳng định 1. (a) $P(n)$ sai khi n chẵn lớn hơn 12 và nó cũng sai khi n lẻ lớn hơn 23.

(b) $P(n)$ đúng với những n chẵn không vượt quá 12, và cũng đúng với những n lẻ không vượt quá 23.

A_n	n	$\max\limits_{i=1,\dots,n}\{a_i\}$	$S(A_n)-\dfrac{n}{2}$
A_{14}	14	42	-0.00005069
A_{14}	14	44	-0.00000522
A_{25}	25	35	-0.00000863
A_{27}	27	12	-0.00095599
A_{27}	27	11	-0.00230880

Bảng B1. Những phản ví dụ của $P(n)$

Tuy vậy, nếu các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ lập thành dãy đơn điệu thì $P(n)$ đúng. Ta có định lý sau đây.

Định lý 1.1. *Nếu các số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn điều kiện $a_i + a_{i+1} > 0$, $i = 1, \dots, n$ $(a_{n+i} := a_1)$ và chúng lập thành một dãy số đơn điệu (tăng hoặc giảm) thì*

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\dots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geq\frac{n}{2}. \tag{1.3}$$

Chứng minh. Ký hiệu

$$S := \frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\dots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2},$$

$$T := \frac{a_2}{a_2+a_3}+\frac{a_3}{a_3+a_4}+\dots+\frac{a_n}{a_n+a_1}+\frac{a_1}{a_1+a_2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức (AM-GM), ta có

$$\begin{aligned} S+T &= \frac{a_1+a_2}{a_2+a_3}+\frac{a_2+a_3}{a_3+a_4}+\dots+\frac{a_{n-1}+a_n}{a_n+a_1}+\frac{a_n+a_1}{a_1+a_2} \\ &\geq n\sqrt[n]{\frac{a_1+a_2}{a_2+a_3}.\frac{a_2+a_3}{a_3+a_4}\cdots\frac{a_{n-1}+a_n}{a_n+a_1}\frac{a_n+a_1}{a_1+a_2}} = n. \end{aligned}$$

Xét hiệu

$$S-T = \frac{a_1-a_2}{a_2+a_3}+\frac{a_2-a_3}{a_3+a_4}+\dots+\frac{a_{n-1}-a_n}{a_n+a_1}+\frac{a_n-a_1}{a_1+a_2}.$$

Dễ thấy

$$a_k - a_1 = (a_k - a_{k-1}) + \dots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1),$$

với mọi $k \geq 2$. Từ đó suy ra

$$S - T = (a_1 - a_2)(\frac{1}{a_2 + a_3} - \frac{1}{a_1 + a_2}) + (a_2 - a_3)(\frac{1}{a_3 + a_4} - \frac{1}{a_1 + a_2})$$
$$+ \cdots + (a_{n-1} - a_n)(\frac{1}{a_n + a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2}).$$

Nếu

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n$$

thì

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &\leq 0, \\ a_2 - a_3 &\leq 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad &\vdots \\ a_{n-1} - a_n &\leq 0. \end{aligned}$$

Theo giả thiết như trên, $a_1 + a_2$ là nhỏ nhất trong các tổng có dạng $a_i + a_j$. Từ đây suy ra phân số

$$\frac{1}{a_1 + a_2}$$

là lớn nhất trong các phân số có dạng

$$\frac{1}{a_i + a_j}.$$

Do vậy

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2 + a_3} - \frac{1}{a_1 + a_2} &\leq 0, \\ \frac{1}{a_3 + a_4} - \frac{1}{a_1 + a_2} &\leq 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad &\vdots \\ \frac{1}{a_n + a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2} &\leq 0. \end{aligned}$$

Lập luận tương tự cho trường hợp

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n \geq 0,$$

ta cũng được $S - T \geq 0$. Tóm lại, trong cả hai trường hợp ta đều có $S \geq T$. Từ đây ta kết luận rằng

$$2S \geq S + T \geq n,$$

hay

$$S \geq \frac{n}{2}.$$

Định lý được chứng minh. □

Định lý 1.2 dưới đây đề cập đến những điều đã phân tích trong câu chuyện lịch sử kể trên.

Định lý 1.2. *Nếu $P(n)$ đúng với $n+2$ số dương tùy ý, thì $P(n)$ cũng đúng với n số dương tùy ý.*

Chứng minh. Ký hiệu $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ là dãy gồm n số dương cho trước bất kỳ. Ta xây dựng dãy $n+2$ số dương có thứ tự như sau

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ a_{n-1},\ a_n.$$

Theo giả thiết của định lý, $P(n)$ đúng với $n+2$ số này, ta được

$$\begin{aligned}\frac{n+2}{2} &\le \frac{a_1}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_{n-1}} + \frac{a_n}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \\ &= \frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} + 1.\end{aligned}$$

Hay
$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \ge \frac{n}{2}.$$

□

Định lý được chứng minh.

Nhận xét 1.1. Kết quả này rất quan trọng trong việc hoàn thiện bài toán đang đề cập. Thực vậy, nếu với một giá trị n biết trước nào đó và nếu $P(n)$ sai, thì $P(k)$ sẽ sai với mọi k cùng tính chẵn hay lẻ với n và $k \ge n$.

Vậy là, bất đẳng thức xoay vòng Shapiro được giải quyết trọn vẹn sau hơn bốn chục năm bởi sự hợp tác toàn diện của các nhà toán học trên toàn thế giới. Dù rằng việc chứng minh bất đẳng thức xoay vòng Shapiro đã được khép lại từ năm 1989, theo quan điểm của chúng tôi, giá trị tinh thần và những bài toán mở rộng cho nó còn có sức lan tỏa rất lớn. Thực vậy, sau năm 1989, nhiều bài toán mở rộng cho (1.1) vẫn tiếp tục được công bố (xem [2, 3, 21] và các tài liệu tham khảo ở đó).

2 Chứng minh $P(4), P(5), P(6)$

Mục này chứng minh bất đẳng thức xoay vòng Shapiro cho $n = 4, 5, 6$. Phép chứng minh cho các trường hợp còn lại rất phức tạp, và nó nằm ngoài phạm vi mục đích chủ yếu của báo cáo này. Bạn đọc quan tâm có thể tham khảo trong tài liệu trích dẫn.

Mệnh đề $P(4)$. Giải thiết a, b, c, d là bốn số thực không âm bất kỳ. Khi đó

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \ge 2. \tag{2.4}$$

Sau đây là hai phép chứng minh cho $P(4)$.

Chứng minh 1. Xét các biểu thức sau

$$S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b},$$
$$M = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} + \frac{a}{a+b},$$
$$N = \frac{c}{b+c} + \frac{d}{c+d} + \frac{a}{d+a} + \frac{b}{a+b}.$$

Dễ thấy

$$M + N = 4.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân ta có

$$\begin{aligned} M + S &= \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+d} + \frac{c+d}{d+a} + \frac{d+a}{a+b}, \\ N + S &= \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b}, \\ &= \frac{a+c}{b+c} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{b+d}{c+d} + \frac{c+a}{d+a} + \frac{d+b}{a+b} \\ &\geq \frac{4(a+c)}{a+b+c+d} + \frac{4(b+d)}{a+b+c+d} = 4. \end{aligned}$$

Suy ra

$$M + N + 2S \geq 8.$$

Vậy

$$S \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.
Chứng minh 2. Đặt

$$M(4) := \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b}.$$

Bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz tương tự như phép chứng minh cho $M(3)$ ở trên, ta chứng minh được

$$M(4) \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ca+da+db}. \tag{2.5}$$

Ta có

$$\begin{aligned} ab+ac+bc+bd+cd+ca+da+db &= (a+c)(b+d) + 2(ac+bd) \\ &\leq (a+c)(b+d) + \frac{1}{2}(a+c)^2 + \frac{1}{2}(b+d)^2 \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c+d)^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Kết hợp (2.5) và (2.6) ta suy ra $M(4) \geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Mệnh đề $P(5)$. Cho năm số thực không âm a, b, c, d, e bất kỳ. Khi đó

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \geq \frac{5}{2}. \qquad (2.7)$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+a} + \frac{e}{a+b} \\
&= \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+bd} + \frac{c^2}{cd+ce} + \frac{d^2}{de+da} + \frac{e^2}{ea+eb} \\
&\geq \frac{(a+b+c+d+e)^2}{ab+bc+cd+de+ea+ac+ce+eb+bd+da}.
\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{(a+b+c+d+e)^2}{ab+bc+cd+cd+de+ea+ac+ce+eb+bd+da} \geq \frac{5}{2}.$$

Thật vậy, đẳng thức cần chứng minh này tương đương với các bất đẳng thức dưới đây:

$$\begin{aligned}
&2(a^2+b^2+c^2+d^2) \\
&\qquad \geq (ab+bc+cd+cd+de+ea+ac+ce+eb+bd+da),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-e)^2 + (e-a)^2 + (a-c)^2 + \\
+ (c-e)^2 + (e-b)^2 + (b-d)^2 + (d-a)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

□

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = e$.

Mệnh đề $P(6)$. Cho sáu số thực không âm a, b, c, d, e, f bất kỳ. Khi đó

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geq 3. \qquad (2.8)$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \\
&= \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+bd} + \frac{c^2}{cd+ce} + \frac{d^2}{de+da} + \frac{e^2}{ef+ea} + \frac{f^2}{fa+fb} \\
&\geq \frac{(a+b+c+d+e+f)^2}{ab+bc+cd+de+ef+fa+ac+ce+ea+bd+df+fb}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Ký hiệu

$$S := ab + bc + cd + de + ef + fa + ac + ce + ea + bd + df + fb.$$

Ta có

$$\begin{aligned} 2S = (a+b+c+d+e+f)^2 \\ - (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2ad+2bd+2cf). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned} &a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2ad+2bd+2cf \\ &= (a+d)^2+(b+e)^2+(d+f)^2 \\ &\geq \frac{1}{3}(a+b+c+d+e+f)^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Do đó,

$$2S \leq \frac{2}{3}(a+b+c+d+e+f)^2.$$

Kết hợp (2.9) và (2.10) ta thu được $M(6) \geq 3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = e = f$. □

3 Mở rộng $P(3)$

Nhận xét rằng bất đẳng thức $P(3)$ có thể viết lại dưới dạng

$$\frac{a^1}{b^1+c^1} + \frac{b^1}{c^1+a^1} + \frac{c^1}{a^1+b^1} \geq \frac{a^0}{b^0+c^0} + \frac{b^0}{c^0+a^0} + \frac{c^0}{a^0+b^0}, \tag{3.11}$$

trong đó $a^0 = b^0 = c^0 = 1$. Ký hiệu

$$F(t) = \frac{a^t}{b^t+c^t} + \frac{b^t}{c^t+a^t} + \frac{c^t}{a^t+b^t},$$

là hàm số theo biến $t \in (0, +\infty)$. Khi đó, $F(t)$ là hàm đồng biến. Do đó

$$F(1) \geq F(0).$$

Ta có bài toán sau.

Bài toán 3.1 (xem trong [10]). Cho a, b, c là ba số dương cho trước, và $\alpha > \beta \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^\alpha}{b^\alpha+c^\alpha} + \frac{b^\alpha}{c^\alpha+a^\alpha} + \frac{c^\alpha}{a^\alpha+b^\alpha} \geq \frac{a^\beta}{b^\beta+c^\beta} + \frac{b^\beta}{c^\beta+a^\beta} + \frac{c^\beta}{a^\beta+b^\beta}. \tag{3.12}$$

Chứng minh. Ta tính đạo hàm của hàm số F :

$$F'(t) = a^t b^t (a^t - b^t)(\ln a - \ln b)\frac{2c^t + a^t + b^t}{(b^t + c^t)(a^t + b^t)}$$
$$+ b^t c^t (b^t - c^t)(\ln b - \ln c)\frac{2a^t + b^t + c^t}{(c^t + a^t)(b^t + c^t)}$$
$$+ c^t a^t (c^t - a^t)(\ln c - \ln a)\frac{2b^t + c^t + a^t}{(a^t + b^t)(c^t + a^t)}.$$

Từ đây suy ra $F'(t) \geq 0$ với mọi $t \geq 0$. Dó đó, hàm số F đồng biến trên khoảng này. Vậy, nếu $\alpha \geq \beta$ thì

$$\frac{a^\alpha}{b^\alpha + c^\alpha} + \frac{b^\alpha}{c^\alpha + a^\alpha} + \frac{c^\alpha}{a^\alpha + b^\alpha} \geq \frac{a^\beta}{b^\beta + c^\beta} + \frac{b^\beta}{c^\beta + a^\beta} + \frac{c^\beta}{a^\beta + b^\beta}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. □

Hệ quả 3.1 dưới đây là một bất đẳng thức đẹp, và là một hệ quả hiển nhiên của định lý vừa nêu.

Hệ quả 3.1. *Nếu a, b, c là các số không âm thì*

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b}.$$

Tuy nhiên, nếu không được đặt vào mối liên hệ tổng thể như trong Bài toán 3.1, thật không dễ để tìm ra lời giải cho bất đẳng thức sau đây.

Bài toán 3.2. Nếu a, b, c là các số không âm thì

$$\frac{a^3}{b^3 + c^3} + \frac{b^3}{c^3 + a^3} + \frac{c^3}{a^3 + b^3} \geq \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2}.$$

Như vậy, cái hay và cái đẹp của một bài toán được cảm nhận triệt để hơn nếu ta thông qua cách nhìn tổng thể của nó, tức là hiểu được bài toán đó nằm trong một bài toán tổng quát nào đó, chứ không phải chỉ là các tiểu xảo của các phép chứng minh và tính cô lập của bài toán đó.

Một hướng mở rộng khác cho $P(3)$ như sau đây.

Bài toán 3.3. Cho a, b, c là ba số dương và $k \geq 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^k}{b + c} + \frac{b^k}{c + a} + \frac{c^k}{a + b} \geq \frac{a^{k-1} + b^{k-1} + c^{k-1}}{2}.$$

Thực ra, bất đẳng thức này có thể xem như là đồng bậc. Do vậy có thể chứng minh theo phương pháp dành cho các bất đẳng thức đồng bậc. Chúng tôi để lại phép chứng minh cho bạn đọc.

Mở rộng tiếp tục cho n số không âm theo hướng này, ta có bài toán sau đây.

Bài toán 3.4. Cho $a_1, \dots, a_n$ là n số dương với $n \geq 3$, và p, q là hai số dương tùy ý. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi số $k \geq 2$:

$$\frac{a_1^k}{pa_2 + qa_3} + \frac{a_2^k}{pa_3 + qa_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}^k}{pa_n + qa_1} + \frac{a_n^k}{pa_1 + qa_2}$$
$$\geq \frac{a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \cdots + a_{n-1}^{k-1} + a_n^{k-1}}{p+q}.$$

Chứng minh. Ký hiệu

$$M := \frac{a_1^k}{pa_2 + qa_3} + \frac{a_2^k}{pa_3 + qa_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}^k}{pa_n + qa_1} + \frac{a_n^k}{pa_1 + qa_2}.$$

Ta quy ước

$$a_{n+1} := a_1, \quad a_{n+2} := a_2.$$

Với mỗi số hạng a_i^{k-1}, $i = 1, 2, \dots, n$ ta biểu thị như sau

$$a_i^{k-1} = \sqrt{\frac{a_i^{k-1}}{pa_{i+1} + qa_{i+2}}} \cdot \sqrt{a_i^{k-1}(pa_{i+1} + qa_{i+2})}.$$

Do đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được

$$\begin{aligned}&\left[a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \cdots + a_{n-1}^{k-1} + a_n^{k-1}\right]^2 \\ &\quad \leq M\Big[p(a_1^{k-2}a_2 + a_2^{k-2}a_3 + \cdots + a_{n-1}^{k-2}a_n + a_n^{k-2}a_1) \\ &\quad + q(a_1^{k-2}a_3 + a_2^{k-2}a_4 + \cdots + a_{n-1}^{k-2}a_1 + a_n^{k-2}a_2)\Big]. \qquad (3.13)\end{aligned}$$

Bằng cách chứng minh như đối với bất đẳng thức đồng bậc, ta dễ dàng thu được hai bất đẳng thức sau đây:

$$\begin{aligned}&a_1^{k-2}a_2 + a_2^{k-2}a_3 + \cdots + a_{n-1}^{k-2}a_n + a_n^{k-2}a_1 \\ &\quad \leq a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \cdots + a_{n-1}^{k-1} + a_n^{k-1}, \qquad (3.14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a_1^{k-2}a_3 + a_2^{k-2}a_4 + \cdots + a_{n-1}^{k-2}a_1 + a_n^{k-2}a_2 \\ &\quad \leq a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \cdots + a_{n-1}^{k-1} + a_n^{k-1}. \qquad (3.15)\end{aligned}$$

Kết hợp ba bất dẳng thức (3.13), (3.14), và (3.15) ta thu được

$$\begin{aligned}&\left[a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \cdots + a_{n-1}^{k-1} + a_n^{k-1}\right]^2 \\ &\quad \leq M(p+q)(a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \cdots + a_{n-1}^{k-1} + a_n^{k-1}).\end{aligned}$$

Từ đây suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. □

Nhận xét 3.1. Khi $k = 1$ và $p = q = 1$, bất đẳng thức trong Bài toán 3.4 trở về bất đẳng thức xoay vòng Shapiro. Như vậy, nó không còn đúng nữa với mọi n số thực dương.

Ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 3.2. *Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương ($n \geq 3$) và $k \geq 2$. Khi đó*

$$\begin{aligned}\frac{a_1^k}{a_2+a_3} + \frac{a_2^k}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}^k}{a_n+a_1} + \frac{a_n^k}{a_1+a_2} \\ \geq \frac{a_1^{k-1} + a_2^{k-1} + \cdots + a_{n-1}^{k-1} + a_n^{k-1}}{2}.\end{aligned}$$

Ta tiếp tục mở rộng cho $P(3)$.

Bài toán 3.5. Cho a, b, c là các số dương, và số $\alpha \leq 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau đây

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c+a}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{a+b}\right)^\alpha \geq \frac{3}{2^\alpha}.$$

Chứng minh. Đặt

$$M := \left(\frac{a}{b+c}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c+a}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{a+b}\right)^\alpha.$$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng và trung bình nhân ta được

$$M \geq 3\sqrt{\left(\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^\alpha}.$$

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Hay

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{8}.$$

Từ giả thiết $\alpha \leq 0$ dễ dàng suy ra

$$\left(\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^\alpha \geq \left(\frac{1}{8}\right)^\alpha.$$

Do vậy,

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c+a}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{a+b}\right)^\alpha \geq \frac{3}{2^\alpha}.$$

□

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 3.6. Cho a, b, c là các số dương, và số $\alpha \leq 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau đây

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{c+a}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{a+b}\right)^\alpha \geq \frac{3}{2^\alpha}.$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli (xem trong [10]), ta có

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha\frac{2a}{b+c},$$
$$\left(\frac{2b}{c+a}\right)^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha\frac{2b}{c+a},$$
$$\left(\frac{2c}{a+b}\right)^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha\frac{2c}{a+b},$$
$$(\alpha-1)\left(\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b}\right) \geq (\alpha-1)3.$$

Cộng các vế của bốn bất đẳng thức trên ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 3.7. Giả thiết rằng a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Cho $\alpha \geq 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^\alpha}{b+c} + \frac{b^\alpha}{c+a} + \frac{c^\alpha}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả thiết $a \geq b \geq c$. Khi đó ta có

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{c+a} \geq \frac{c}{a+b},$$

$$a^{\alpha-1} \geq b^{\alpha-1} \geq c^{\alpha-1}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev, ta được

$$\frac{a^\alpha}{b+c} + \frac{b^\alpha}{c+a} + \frac{c^\alpha}{a+b}$$
$$\geq \frac{1}{3}\left(a^{\alpha-1} + b^{\alpha-1} + c^{\alpha-1}\right)\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức (AM-GM) và sử dụng giả thiết $abc = 1$ ta được

$$a^{\alpha-1} + b^{\alpha-1} + c^{\alpha-1} \geq 3\sqrt{a^{\alpha-1}b^{\alpha-1}c^{\alpha-1}} = 3.$$

Theo bất đẳng thức Shapiro $P(3)$ thì

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Từ đây ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. □

Lời giải khác cho bất đẳng thức của Bài toán 3.7 như sau. Trước hết, mỗi số hạng dưới đây sẽ được tách thành hai nhân tử:

$$a^{\frac{1+\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{a^\alpha}{b+c}}\sqrt{a(b+c)},$$
$$b^{\frac{1+\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{b^\alpha}{c+a}}\sqrt{b(c+a)},$$
$$c^{\frac{1+\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{c^\alpha}{a+b}}\sqrt{c(a+b.}$$

Sử dụng cách thức tách hệ số như trên và áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được

$$\left(a^{\frac{1+\alpha}{2}} + b^{\frac{1+\alpha}{2}} + c^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)^2$$
$$\left[a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)\right]\left(\frac{a^\alpha}{b+c} + \frac{b^\alpha}{c+a} + \frac{c^\alpha}{a+b}\right).$$

Phép chứng minh được hoàn tất nếu bất đẳng thức sau được chứng minh

$$\left(a^{\frac{1+\alpha}{2}} + b^{\frac{1+\alpha}{2}} + c^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)^2 \geq 3(ab+bc+ca). \tag{3.16}$$

Trước khi chứng minh (3.16), ta chứng minh bất đẳng thức

$$a^{\frac{1+\alpha}{2}} + b^{\frac{1+\alpha}{2}} + c^{\frac{1+\alpha}{2}} \geq a+b+c. \tag{3.17}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức (AM-GM) và sử dụng giả thiết $abc = 1$ ta có

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3. \tag{3.18}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta được

$$a^{\frac{1+\alpha}{2}} + \frac{1+\alpha}{2} - 1 \geq \frac{1+\alpha}{2}.a \tag{3.19}$$
$$b^{\frac{1+\alpha}{2}} + \frac{1+\alpha}{2} - 1 \geq \frac{1+\alpha}{2}.b \tag{3.20}$$
$$c^{\frac{1+\alpha}{2}} + \frac{1+\alpha}{2} - 1 \geq \frac{1+\alpha}{2}.c. \tag{3.21}$$

Cộng các vế của ba bất đẳng thức (3.19), (3.20), và (3.21), và sử dụng (3.18) ta được

$$\begin{aligned}
&a^{\frac{1+\alpha}{2}} + b^{\frac{1+\alpha}{2}} + c^{\frac{1+\alpha}{2}} \\
&\geq \frac{1+\alpha}{2}\left(a+b+c\right) + 3 - \frac{3+3\alpha}{2} \\
&= (a+b+c) + \left[\frac{\alpha-1}{2}\left(a+b+c\right)\right] + 3 - \frac{3+3\alpha}{2} \\
&\geq (a+b+c) + \frac{\alpha-1}{2}.3 + 3 - \frac{3+3\alpha}{2} = a+b+c.
\end{aligned}$$

Như vậy, (3.17) được chứng minh. Từ đây suy ra

$$\left(a^{\frac{1+\alpha}{2}} + b^{\frac{1+\alpha}{2}} + c^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)^2 \geq (a+b+c)^2. \tag{3.22}$$

Mặt khác, dễ dàng chứng minh

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca). \tag{3.23}$$

kết hợp hai bất đẳng thức (3.22) và (3.23) ta suy ra (3.16). Như vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3.8. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Giả thiết $\alpha \geq 2$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{a^\alpha(b+c)} + \frac{1}{b^\alpha(c+a)} + \frac{1}{c^\alpha(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh được suy trực tiếp từ bất đẳng thức trong Bài toán 3.7, bằng cách đổi biến

$$x = \frac{1}{a}, \quad y = \frac{1}{a}, \quad z = \frac{1}{a},$$

và

$$\alpha = \alpha' + 1.$$

Chú ý rằng ta vẫn có $xyz = 1$. Vì vậy, bất đẳng thức được chứng minh. □

Hơn nữa, bất đẳng thức (3.24) dưới đây là trường hợp riêng biệt của bất đẳng thức vừa chứng minh.

Bài toán 3.9 (IMO, 1995). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}. \tag{3.24}$$

4 Mở rộng khác cho $P(n)$ và hai bài toán mở

Phương pháp được dùng để chứng minh các định lý chính trong mục này liên quan đến các dạng toàn phương xác định dương

Được thúc đẩy bởi các hướng mở rộng và các chứng minh của (1.1), ta xét bất đẳng thức sau

$$P(n,p,q) := \frac{x_1}{px_2+qx_3} + \frac{x_2}{px_3+qx_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{px_n+qx_1} + \frac{x_n}{px_1+qx_2} \geq \frac{n}{p+q}, \tag{4.25}$$

ở đó $p, q \geq 0$ và $p + q > 0$ (xem trong [22]).

Trước tiên, bất đẳng thức (4.25) đúng với $n = 3$. Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)^2 &= \left(\sqrt{\frac{x_1}{px_2 + qx_3}}\sqrt{x_1(px_2 + qx_3)}\right.\\ &\left.+ \sqrt{\frac{x_2}{px_3 + qx_1}}\sqrt{x_2(px_3 + qx_1)} + \sqrt{\frac{x_3}{px_1 + qx_2}}\sqrt{x_3(px_1 + qx_2)}\right)^2\\ &\leq P(3, p, q)(p + q)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$P(3, p, q) \geq \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{(p + q)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)} \geq \frac{3}{p + q}.$$

Dễ thấy, (4.25) đúng cho mọi $n \geq 4$ nếu $p = 0$ hoặc $q = 0$.

Đối với trường hợp $n = 4$, chúng ta sẽ chứng minh rằng bất đẳng thức (4.25) đúng khi $p \geq q$ hoặc khi dãy số a, b, c, d là đơn điệu, và sai khi $p < q$. Hơn nữa, trong trường hợp $n = 5$ chúng tôi đưa ra một điều kiện đủ cho p, q để bất đẳng thức (4.25) là đúng. Mục này cũng chỉ ra rằng bất đẳng thức đó đúng nếu $p < q$, tiếp đó bất đẳng thức (4.25) sai cho mọi số chẵn $n \geq 4$ khi $p < q$. Hai câu hỏi mở được thảo luận ở phần cuối mục này.

Định lý 4.1. *Cho p, q là hai số dương tùy ý. Nếu các số dương a, b, c, d lập thành một dãy số đơn điệu thì*

$$S = \frac{a}{pb + qc} + \frac{b}{pc + qd} + \frac{c}{pd + qa} + \frac{d}{pa + qb} \geq \frac{4}{p + q}. \tag{4.26}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}(a + b + c + d)^2 &= \left(\sqrt{\frac{a}{pb + qc}}.\sqrt{a(pb + qc)} + \sqrt{\frac{b}{pc + qd}}.\sqrt{b(pc + qd)} +\right.\\ &\left.+\sqrt{\frac{c}{pd + qa}}.\sqrt{c(pd + qa)} + \sqrt{\frac{d}{pa + qb}}.\sqrt{d(pa + qb)}\right)^2\\ &\leq S\Big[p(ab + bc + cd + da) + 2q(ac + bd)\Big].\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$S \geq \frac{(a + b + c + d)^2}{p(ab + bc + cd + da) + 2q(ac + bd)}.$$

Ta có

$$ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) \leq \frac{1}{4}(a + b + c + d)^2.$$

Do đó

$$S \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{\frac{p}{4}(a+b+c+d)^2 + 2q(ac+bd)}. \tag{4.27}$$

Xét hai khả năng về tính đơn điệu:

Trường hợp $0 < a \leq b \leq c \leq d$. Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho các cặp số $a \leq d$ và $c \geq b$, ta có

$$ac + bd \leq \frac{1}{2}(a+d)(b+c) \leq \frac{1}{8}(a+b+c+d)^2.$$

Trường hợp $a \geq b \geq c \geq d > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho các cặp số $a \geq d$ và $c \leq b$, ta có

$$ac + bd \leq \frac{1}{2}(a+d)(b+c) \leq \frac{1}{8}(a+b+c+d)^2.$$

Tóm lại, ta luôn có

$$ac + bd \leq \frac{1}{8}(a+b+c+d)^2. \tag{4.28}$$

Kết hợp (4.27) và (4.28) ta được

$$S \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{\frac{p}{4}(a+b+c+d)^2 + \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2} = \frac{4}{p+q}.$$

Định lý được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$. □

Sau đây, ta xét (4.25) cho $n = 4$ với dãy số dương x_1, x_2, x_3, x_4 bất kỳ.

Không mất tính tổng quát, có thể giả thiết rằng $p + q = 1$. Thực vậy, giả sử $p + q = a > 0$. Bất đẳng thức (4.25) tương đương với bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} P(n,p',q') := \frac{x_1}{p'x_2 + q'x_3} + \frac{x_2}{p'x_3 + q'x_4} + \cdots \\ + \frac{x_{n-1}}{p'x_n + q'x_1} + \frac{x_n}{p'x_1 + q'x_2} \geq \frac{n}{p'+q'}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

trong đó

$$p' = \frac{p}{a},$$
$$q' = \frac{q}{a} \geq 0.$$

Bây giờ, p', q' thỏa mãn mãn đẳng thức $p' + q' = 1$.

Như vậy, bất đẳng thức (4.29) đối với $n = 4$ bây giờ có dạng

$$\begin{aligned} P(4,p,q) = \frac{x_1}{px_2 + qx_3} + \frac{x_2}{px_3 + qx_4} \\ + \frac{x_3}{px_4 + qx_1} + \frac{x_4}{px_1 + qx_2} \geq 4. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Định lý 4.2 ([21]). *Bất đẳng thức (4.30) đúng đối với $p \geq q$, và sai đối với $p < q$.*

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \leq \\ &P(4,p,q)\Big[x_1(px_2 + qx_3) + x_2(px_3 + qx_4) \\ &\qquad + x_3(px_4 + qx_1) + x_4(px_1 + qx_2)\Big].\end{aligned}$$

Như vậy

$$P(4,p,q) \geq \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}{px_1x_2 + 2qx_1x_3 + px_1x_4 + px_2x_3 + 2qx_2x_4 + px_3x_4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$px_2 + qx_3 = px_3 + qx_4 = px_4 + qx_1 = px_1 + qx_2. \tag{4.31}$$

Xét dạng toàn phương

$$\begin{aligned}\omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}&(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \\ &- 4(px_1x_2 + 2qx_1x_3 + px_1x_4 + px_2x_3 + 2qx_2x_4 + px_3x_4).\end{aligned}$$

Bằng tính toán đơn giản ta thu được dạng toàn phương chuẩn tắc ω như sau

$$\omega(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1^2 + 4pqt_2^2 + \frac{4q(2p-1)}{p}t_3^2, \tag{4.32}$$

ở đó

$$\begin{aligned}t_1 &= x_1 + (1-2p)x_2 + (1-4q)x_3 + (1-2p)x_4, \\ t_2 &= x_2 + \frac{1-2p}{p}x_3 - \frac{q}{p}x_4, \\ t_3 &= x_3 - x_4.\end{aligned}$$

Ta dễ dàng thấy rằng nếu $p \geq q$, tức là $p \geq \frac{1}{2}$, thì $\omega \geq 0$ với mọi t_1, $t_2, t_3 \in \mathbb{R}$. Điều đó suy ra ω là dương. Ta cũng có $P(4,p,q) \geq 4$.

Bây giờ ta xét trường hợp khi ω triệt tiêu. Điều này phụ thuộc đáng kể vào mối tương quan giữa p và q. Nếu $p = q$, nghĩa là nếu $p = \frac{1}{2}$, thì dạng toàn phương ω triệt tiêu tại

$$t_1 = x_1 - x_3 = 0$$

và

$$t_2 = x_2 - x_4 = 0.$$

Theo (4.31) ta khẳng định rằng

$$P(4, p, q) = 4$$

khi

$$\begin{cases} x_1 &= x_3, \\ x_2 &= x_4. \end{cases}$$

Hơn nữa, nếu $p > \frac{1}{2}$, thì ω triệt tiêu khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} t_1 &= x_1 + (1-2p)x_2 + (1-4q)x_3 + (1-2p)x_4 = 0, \\ t_2 &= x_2 + \frac{1-2p}{p}x_3 - \frac{q}{p}x_4 = 0, \\ t_3 &= x_3 - x_4 = 0. \end{aligned}$$

Kết hợp những công thức này với (4.31) ta suy ra rằng

$$P(4, p, q) = 4$$

khi

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4.$$

Bây giờ ta đưa ra một phản ví dụ cho bất đẳng thức (4.30) trong trường hợp $p < q$, tức là $p < \frac{1}{2}$. Cho

$$x_1 = x_3 = a, \quad x_2 = x_4 = b,$$

và $a \neq b$. Ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} &\frac{a}{pb+qa} + \frac{b}{pa+qb} + \frac{a}{pb+qa} + \frac{b}{pa+qb} \\ &\qquad = 2\left(\frac{a}{pb+qa} + \frac{b}{pa+qb}\right) < 4. \quad (4.33) \end{aligned}$$

Thật vậy, bất đẳng thức (4.33) tương đương với những bất đẳng thức sau đây

$$\begin{aligned} &p(2q-1)(a^2+b^2) + 2(p^2+q^2-q)ab > 0, \\ &p(1-2p)(a-b)^2 > 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối là hiển nhiên đúng do $a \neq b$ và $p < \frac{1}{2}$. Vậy, bất đẳng thức (4.33) đúng.

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 4.1. Ký hiệu

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1-2p & 1-4q & 1-2p \\ 1-2p & 1 & 1-2p & 1-4q \\ 1-4q & 1-2p & 1 & 1-2p \\ 1-2p & 1-4q & 1-2p & 1 \end{pmatrix}$$

là ma trận của dạng toàn phương ω trong cơ sở chính tắc của không gian thực $\mathbb{R}^4$. Gọi D_1, D_2, D_3 và D_4 là các định thức con chính có các cấp tương ứng là 1, 2, 3 và 4 của A. Bằng tính toán trực tiếp ta thu được

$$\begin{aligned}
D_1 &= 1, \\
D_2 &= 4pq, \\
D_3 &= 16q^2(2p-1), \\
D_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Như vậy ω là xác định dương nếu và chỉ nếu $D_i \geq 0$ với mọi $i = 1, 2, 3, 4$. Như vậy, ta thu được kết luận thứ nhất trong Định lý 4.2.

Dựa trên ý tưởng sử dụng các dạng toàn phương xác định dương, bây giờ ta nghiên cứu bất đẳng thức (4.25) trong trường hợp $n = 5$. Ta chỉ cần xét trường hợp $p + q = 1$ là đủ. Bằng cách áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta dẫn đến bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, \ldots, x_5) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 &+ (2-5p)x_1x_2 + (2-5q)x_1x_3 + (2-5q)x_1x_4 \\
&+ (2-5p)x_1x_5 + (2-5p)x_2x_3 + (2-5q)x_2x_4 + (2-5q)x_2x_5 \\
&+ (2-5p)x_3x_4 + (2-5q)x_3x_5 + (2-5p)x_4x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Ma trận của φ trong một hệ véc tơ cơ sở thích hợp có dạng

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}
2 & 2-5p & 2-5q & 2-5q & 2-5p \\
2-5p & 2 & 2-5p & 2-5q & 2-5q \\
2-5q & 2-5p & 2 & 2-5p & 2-5q \\
2-5q & 2-5q & 2-5p & 2 & 2-5p \\
2-5p & 2-5q & 2-5q & 2-5p & 2
\end{pmatrix}.$$

Ma trận B có các định thức con chính

$$\begin{aligned}
D_1 &= 1, \\
D_2 &= \frac{5p(4-5p)}{4}, \\
D_3 &= \frac{25q(5pq-1)}{4}, \\
D_4 &= \frac{125(1-5pq)^2}{16}, \\
D_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Điều này suy ra điều kiện cần và đủ để dạng toàn phương φ xác định dương là

$$\frac{5-\sqrt{5}}{10} \leq p \leq \frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

Ta cũng thu được một điều kiện đủ để bất đẳng thức (4.25) đúng đối với $n = 5$.

Định lý 4.3. *Nếu*

$$\frac{5-\sqrt{5}}{10} \leq p \leq \frac{5+\sqrt{5}}{10},$$

thì (4.25) *đúng đối với* $n = 5$.

Nhận xét 4.2. Xét bất đẳng thức (4.25) trong trường hợp $n \geq 4$, n chẵn, và $p < q$. Theo chứng minh phần hai của Định lý 4.2 bất đẳng thức này là sai. Thật vậy, ta chọn

$$x_1 = x_3 = \cdots = a, \quad x_2 = x_4 = \cdots = b.$$

Theo phản ví dụ ở trên ta nhận được

$$P(n,p,q) < \frac{n}{p+q}.$$

Bài toán mở. Một cách tự nhiên, hai bài toán mở sau đây được đặt ra:

1. Tìm các cặp hai số không âm p, q sao cho bất bất đẳng (4.25) đúng với mọi $n \geq 4$.

2. Đối với $n \geq 5$, tìm điều kiện đủ của cặp p, q sao cho bất đẳng thức (4.25) đúng.

Nhận xét 4.3. Ta nhận thấy rằng nếu $p = 0$ hoặc $q = 0$, thì nó là trường hợp đối với mọi $n \geq 4$, và Định lý 4.3 là câu trả lời chi tiết đối với $n = 5$.

Như chúng ta đã thấy trong Mục 1, việc chứng minh bất đẳng thức xoay vòng Shapiro là một câu chuyện dài thú vị. Chúng tôi hy vọng rằng bạn đọc có những cảm xúc nhất định về họ hàng của bất đẳng thức xoay vòng của Shapiro, những cản hứng và niềm đam mê trong tìm tòi, và những khám phá bất ngờ liên quan đến những mở rộng trên đây.

5 Những dư âm

Như ta đã thấy trong Mục 1, bất đẳng thứ xoay vòng Shapiro được đón nhận tích cực và có sức hấp dẫn lớn. Mục này xét một góc độ nhìn nhận khác của bất đẳng thức Shapiro, từ đó cho ta thấy một số bài toán thú vị liên quan đến nó. Những gì được trình bày ở đây một lần nữa minh chứng rằng, những dư âm của bất đẳng thức xoay vòng Shapiro còn lan tỏa trong nhiều năm nữa (xem [4, 15, 21, 22]).

Với mỗi $n \geq 3$, ký hiệu

$$S_n := \frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2}. \tag{5.34}$$

Ta biểu thị bất đẳng thức (1.1) dưới dạng khác tương đương như dưới đây

$$\frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{2}. \tag{5.35}$$

Như chúng ta đã thấy, tùy thuộc vào n cụ thể mà bất đẳng thức (5.35) sẽ là đúng, hoặc sai. Cụ thể, có hai khả năng sau đây:

- Nếu $n = 3, 4, \ldots, 12$, hoặc $n = 13, 15, 17, 19, 21, 23$ thì

$$\min_{x\in K} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2},$$

  ở đây K là chóp của các vector có các tọa độ không âm như đã đề cập trong Mục 1. Hiển nhiên, $S(x)$ có vô số điểm cực tiểu trong K, chẳng hạn

$$x = (a, a, \ldots, a) \quad \text{ở đây} \quad a > 0.$$

- Nếu khác đi, nghĩa là nếu

$$n \notin \{3, 4, \ldots, 12\} \cup \{13, 15, 17, 19, 21, 23\},$$

  thì

$$\min_{x\in K} \frac{S_n}{n} < \frac{1}{2}.$$

Bây giờ, với mỗi $n \geq 3$ cố định ta đặt

$$\inf_{x\in K} \frac{S_n}{n} = K(n).$$

Như vậy, $K(n)$ là đại lượng phụ thuộc chặt chẽ vào n. Nói cách khác, ta có một dãy số $\{K(n)\}_{n\geq 3}$.

Đã từng có một dự đoán rằng khi n càng lớn thì $K(n)$ càng nhỏ. Khái quát hơn, có hai câu hỏi được đặt ra một cách tự nhiên.

- *Bài toán 1.* Nghiên cứu dáng điệu của dãy số

$$\{K_n\}_{n\geq 3}.$$

  Chúng ta đã biết mười giá trị ban đầu của dãy này, đó là:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2},$$

và sáu số hạng với chỉ số lẻ tiếp theo là

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}.$$

Những số hạng còn lại của dãy $\left\{K_n\right\}_{n\geq 3}$ chưa được nghiên cứu trọn vẹn.

Việc nghiên cứu dãy số này có thể đem lại những khám phá bất ngờ và thú vị. Để chuẩn bị cho những dư án tìm tòi và khám phá của mình, chúng tôi khuyến cáo bạn đọc nên tham khảo nhiều công trình nghiên cứu khác trong phần tài liệu tham khảo.

- *Bài toán 2.* Tìm giá trị của α để bất đẳng thức

$$\frac{S_n}{n} \geq \alpha$$

đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ (tất nhiên, với mọi x thuộc chóp K).

Liên quan đến bài toán này, năm 1961, Rankin [16] đã chỉ ra rằng

$$\frac{S_n}{n} > 0.3307\ldots,$$

và Diananda [5] chứng minh được

$$\frac{S_n}{n} > 0.461238\ldots$$

với mọi n. Kết quả vừa nêu của Diananda đã từng được xem là một kết quả đẹp đẽ.

Tuy nhiên, trong một bài báo rất đáng chú ý [7], Drinfeld chứng minh điều được điều tuyệt vời sau đây

$$\inf_{n\geq 3}\left\{\frac{\inf\limits_{x\in K} S_n(x)}{n}\right\} = 0.4945668.$$

Thật ngạc nhiên, giá trị cực tiểu của $\dfrac{S_n(x)}{n}$ so với giá trị tại các *điểm cân bằng* ($x_1 = x_2 = \cdots = x_n$) không quá 1%.

Có một điều thú vị là, độc lập với kết quả của Drinfeld, Troesch [20] cũng thu được kết quả tương tự như thế, nhưng ở đó phép chứng minh của tác giả là không hoàn chỉnh, do vẫn dựa trên một số giả thiết và điều kiện bổ sung.

Mặc dù bài toán gốc đã được khép lại năm 1989, Bushell [2] nghiên cứu điểm cực tiểu của S_n được công bố trên một tạp chí có uy tín rất lớn vào năm 1994. Cụ thể, tác giả xét toán tử phi tuyến

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto ((Tx)_1, \ldots, (Tx)_n) \end{aligned}$$

được xác định như sau

$$(Tx)_k = \frac{x_{n-k+1}}{\left(x_{n-k+2} + x_{n-k+3}\right)^2}$$

với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$ (ta quy ước $x_{k+n} = x_k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$). Ký hiệu K là chóp trong $\mathbb{R}^n$ gồm tất cả các vector có các tọa độ không âm. Tác giả chứng minh rằng điểm cực tiểu toàn cục $x_0 \in K$ của $S_n(x)$ là điểm bất động của toán tử phi tuyến T^2, nghĩa là

$$T^2 x_0 = x_0,$$

và bất đẳng thức chỉ mối quan hệ giữa toán tử T là hàm S như dưới đây

$$S(Tx) \geq S(x),$$

trong đó đẳng thức xảy ra chỉ tại điểm bất động của toán tử T^2, nghĩa là chỉ khi $T^2 x = x$.

Chú ý rằng, công trình vừa nêu của Bushell không phải là bài toán gốc, mà là giải quyết bài toán nảy sinh ra từ bài toán gốc (1.1).

Rất đáng để nhấn mạnh một điều, rằng cho đến thời điểm công bố bài báo của Bushell [2], con người thành công trong các phép chứng minh giải tích hoặc đại số (ám chỉ những chứng minh chỉ dựa trên những logic, và tính toán đơn giản *bằng bút chì và tờ giấy*) mới chỉ cho những giá trị của n bằng 3, 4, 5, 6, và 8. Như vậy, phép chứng minh giải tích hoặc đại số cho $P(n)$ với những trường hợp $n = 10, 12$, và 23 vẫn là bài toán mở. Theo Định lý 1.2, chỉ còn hai bài toán mở là khi $n = 12$, và $n = 23$.

Năm 2002, hai tác giả Bushell và McLeod [3] đưa ra một phép chứng minh giải tích cho $n = 12$, khép lại một trong hai cánh cửa còn bỏ ngỏ như vừa đề cập.

Câu chuyện trên đây một lần nữa nói lên bất đẳng thức Shapiro đã có sức hấp dẫn lớn như thế nào. Theo những thông tin mà chúng tôi biết được, cánh cửa của chứng minh giải tích hay đại số (nói nôm na, *bằng bút chì và giấy*) cho $P(23)$ vẫn còn bỏ ngỏ, đang mong chờ sự khám phá mới.

Tài liệu

[1] Recent Progress in inequality (G. V. Milovanovic, ed.), Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, first ed., 1997.

[2] P. J. Bushell, *Shapiro's cyclic sum*, Bull. London Math. Soc. **26** (1994), 564–574.

[3] P. J. Bushell and J. B. McLeod, *Shapiro's cyclic inequality for even n*, J. of Inequal. & Appl. **7** (2002), no. 3, 331–348.

[4] V. Cirtoaje, *On a proof of an inequality of two real numbers*, JNSA, V. 4 (2011), Issue 2, 130–137.

[5] P. H. Diananda, *A cyclic inequality and an extension of it. II*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), V. 13 (1962), pp. 143-152.

[6] P. H. Diananda, *On a cyclic sum*, Proc. Glasgow Math. Assoc. **6** (1963), 11–13.

[7] V. G. Drinfeld, *A cyclic inequality*, Math. Notes **9** (1971), 68–71.

[8] R. P. Lewwis, *Antisocial dinner parties*, Fibonacci Quart., to appear.

[9] M. J. Lighthill, *An invalid inequality*, Amer. Math. Monthly **63** (1956), 191–192.

[10] N. V. Mau, *Bất đẳng thức. Định lý và áp dụng*, NXB Giáo dục, Hà Nội–Đà Nẵng, 2006.

[11] L. J. Mordell, *On the inequality* $\sum_{r=1}^{n} x_r/(x_{r+1}+x_{r+2}) \geq n/2$ *and some others*, Abh. Math. Se. Univ. Hamburg **22** (1958), 229–240.

[12] ———, *Note on the inequality* $\sum_{r=1}^{n} x_r/(x_{r+1}+x_{r+2}) \geq n/2$ *and some others*, J. London Math. Soc. **37** (1962), 176–178.

[13] A. M. Nesbitt, *Problem 15114*, Educational Times, 3 (1903), 37–38.

[14] P. Nowosad, *Isoperimetric eigenvalue problems in algebras*, Comm. Pure Appl. Math., 21 (1968), pp. 401-465.

[15] B. G. Pachpatte, *Mathematical Inequalities*, North-Holland Mathematical Library, V. 67 (first ed.). Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 2005.

[16] R. A. Rankin, *A cyclic inequality*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), V. 12 (1961), pp. 139-147.

[17] H. S. Shapiro, *Advanced problem # 4603*, Amer. Math. Monthly, 61 (1954), p. 571.

[18] N. E. Steenrod, P. R. Halmos, A. M. Schiffer, and J. A. Dieudonné, *How to write mathematics*, Amer. Math. Society, USA, 1973.

[19] B. A. Troesch, *The validity of shapiro's cyclic inequality*, Math. Comp. **53** (1989), 657–664.

[20] B. A. Troesch, *The shooting method applied to a cyclic inequality*, Math. Comp., V. 34, (1980), pp. 175-184.

[21] N. M. Tuan and L. Q. Thuong, *On an extension of shapiro's cyclic inequality*, J. Inequalities Appl. (2009), no. 12, 1–5.

[22] N. M. Tuấn, *Cơ sở lý thuyết hàm lồi và các bất đẳng thức cổ điển*, NXB Giáo dục, Tập I, II, 2013.

Phương trình chứa phần nguyên

Nguyễn Thị Hồng Hạnh, THPT Lê Hồng Phong, Phổ Yên, TN
Nguyễn Thị Bình Minh, THCS Trần Phú, Hải Phòng
Tạ Duy Phượng, Viện Toán học

Mở đầu Hàm phần nguyên khá độc đáo, *không giống ai*. Thí dụ, hàm phần nguyên vừa đơn giản (là hàm hằng từng khúc) lại vừa phức tạp (không liên tục tại các điểm nguyên, nên khó sử dụng công cụ giải tích). Nhiều bài toán với lời giải hay và đẹp về phần nguyên đã được dùng làm đề thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Khái niệm phần nguyên, phần dư có vai trò quan trọng trong xây dựng cơ sở toán học của tập số thực và liên quan đến nhiều lĩnh vực của toán sơ cấp (phương trình hàm, phương trình nghiệm nguyên, tính tổng,...), đồng thời được sử dụng trong nhiều vấn đề của toán ứng dụng và công nghệ thông tin (làm tròn số, tính gần đúng,...).

Lí thuyết và bài tập về phần nguyên rải rác đã có trong các sách, các tạp chí và các báo cáo hội nghị (xem, thí dụ, [5]), thậm chí đã là một chương hoặc một chuyên đề trong một số sách về số học (xem, thí dụ, [1], [2], [3], [6]). Hàm phần nguyên được coi là một trong các *hàm số học cơ bản*. Tuy nhiên, hình như chưa có một cuốn sách nào viết riêng về chuyên đề phần nguyên.

Bài viết này giới thiệu một phần nội dung Chương 3 bản thảo cuốn sách [4]. *Chương 1* của cuốn sách trình bày các kiến thức cơ bản về hàm phần nguyên, trong đó tập hợp các định nghĩa, các tính chất và đồ thị của hàm phần nguyên cũng như các tính chất của một số hàm có dạng tương tự hoặc liên quan đến hàm phần nguyên được sử dụng trong các chương sau. Các dạng toán cơ bản chứa phần nguyên được sắp xếp trong 4 chương.

Chương 2. *Phần nguyên trong số học.*
Chương 3. *Phần nguyên trong đại số.*
Chương 4. *Phần nguyên trong giải tích.*
Chương 5. *Phần nguyên và các bài toán liên quan.*

Phần lớn các bài tập về phần nguyên thường được giải một cách tương đối chuyên biệt, nhiều khi đòi hỏi những kĩ thuật chứng minh và các suy luận rất độc đáo, do đó khó áp dụng cho những bài toán khác, khiến những bài tập và đề thi về phần nguyên luôn là những bài toán khó. Nhằm giúp các bạn học sinh đỡ lúng túng hơn khi gặp những bài tập về phần nguyên, trong mỗi Chương, chúng tôi cố gắng, mặc dù không phải lúc nào cũng làm được, phân loại các dạng bài tập và đưa ra các phương pháp chung giải các bài tập thuộc dạng đó. Điều này khiến lời giải phần nào trở nên dễ dàng và tự nhiên hơn.

Giải toán về phần nguyên đòi hỏi phải biết kết hợp nhiều kiến thức và kĩ thuật khác nhau, như các tính chất chia hết, khai triển nhị thức Newton, các tính chất của hàm số và dãy số, phương trình hàm, hệ đếm,... Giải phương trình chứa phần nguyên liên quan đến giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối, hệ bất phương trình, các phương trình nghiệm nguyên,... Vì vậy chuyên đề *Phần nguyên* và *Phương trình chứa phần nguyên* có thể giúp nâng cao tư duy và bổ sung kiến thức toán học, cũng như rèn luyện các kĩ năng làm toán.

Do khuôn khổ bài viết, chúng tôi chỉ trình bày một mục trong Chương 3 của bản thảo quyển sách [4] về *Phương trình chứa phần nguyên*. Bạn đọc quan tâm về các vấn đề khác có thể tham khảo thêm [4].

Một số khái niệm và kiến thức bổ trợ

Định nghĩa 1. *Cho một số thực $x \in \mathbb{R}$. Số nguyên lớn nhất không vượt quá x được gọi là phần nguyên (integer part, integral part) hay sàn (floor) của x. Phần nguyên của x được kí hiệu là $[x]$ hoặc $\lfloor x \rfloor$.*
Số nguyên bé nhất không nhỏ hơn x được gọi là trần (ceiling) của x và được kí hiệu là $\lceil x \rceil$.

Hai khái niệm *sàn* và *trần* được sử dụng nhiều trong tin học.

Định nghĩa 2. *Phần dư (phần phân, phần thập phân, phần lẻ, giá trị phân-fractional part, fractional value) của một số thực x, kí hiệu là $\{x\}$ được định nghĩa bởi công thức $\{x\} = x - [x]$.*

Dưới đây phát biểu và chứng minh một số bổ đề có sử dụng trực tiếp trong các bài tập. Các tính chất khác không kém quan trọng và thú vị của phần nguyên có thể xem trong [4].

Bổ đề 1. *Nếu $[x] = [y]$ thì $|x - y| \leq 1$ hay $-1 < x - y < 1$.*

Chứng minh. Trước tiên ta nhận xét: Nếu a và b là hai số không âm thì $|a-b| \leq \max\{a, b\}$, trong đó $\max\{a, b\}$ là số lớn nhất giữa a và b.
Thật vậy, không hạn chế tổng quát, ta coi $a > b > 0$. Khi ấy

$$|a - b| = a - b \leq a = \max\{a, b\}.$$

Áp dụng Do $[x] = [y]$ theo giả thiết và $0 \leq x < 1$; $0 \leq y < 1$ nên

$$|x - y| = \big|[x] + \{x\} - ([y] + \{y\})\big| = \big|\{x\} - \{y\}\big| \leq \max\big\{\{x\}, \{y\}\big\} < 1$$

hay $-1 < x - y < 1$. □

Ngược lại nói chung không đúng. Thí dụ:

$$|3,1 - 2,9| = 0,2 < 1 \text{ nhưng } [3,1] = 3 \neq 2 = [2,9].$$

Bổ đề 2. *Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có*
a) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$;
b) $\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\} \leq \{x + y\} + 1$.

Chứng minh. a, Vì $0 \leq \{x\} < 1$ và $0 \leq \{y\} < 1$ nên $0 \leq \{x\} + \{y\} < 2$. Do đó với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ thì $[\{x\} + \{y\}]$ chỉ có thể bằng 0 hoặc bằng 1.
Nếu $\big[\{x\} + \{y\}\big] = 0$ thì ta có

$$[x+y] = \big[[x] + \{x\} + [y] + \{y\}\big] = [x] + [y] + \big[\{x\} + \{y\}\big] = [x] + [y].$$

Nếu $\big[\{x\} + \{y\}\big] = 1$ thì $[x+y] = [x] + [y] + \big[\{x\} + \{y\}\big] = [x] + [y] + 1$. Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta có a) đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.
Ta thấy rằng, chỉ có thể xảy ra một trong hai dấu bằng trong hệ thức a), mà không bao giờ đồng thời xảy ra $[x] + [y] = [x+y] = [x] + [y] + 1$. Cụ thể,

$$[x] + [y] = [x+y] < [x] + [y] + 1 (\text{khi} \big[\{x\} + \{y\}\big] = 0)$$

hoặc

$$[x] + [y] < [x+y] = [x] + [y] + 1 (\text{khi} \big[\{x\} + \{y\}\big] = 1).$$

b) Từ bất đẳng thức $[x] + [y] \leq [x+y]$ đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta cũng có

$$x + y - \{x+y\} = [x+y] \geq [x] + [y] = x - \{x\} + y - \{y\}.$$

Suy ra $\{x+y\} \leq \{x\} + \{y\}$ đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.
Tương tự,

$$x + y - \{x+y\} = [x+y] \leq [x] + [y] + 1 = x - \{x\} + y - \{y\} + 1.$$

Suy ra $\{x\} + \{y\} \leq \{x+y\} + 1$.
Từ hai bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức b) đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.
Hơn nữa, theo chứng minh phần trên ta cũng có

$$\{x+y\} = \{x\} + \{y\} \Leftrightarrow 0 \leq \{x\} + \{y\} < 1$$

và

$$\{x+y\} = \{x\} + \{y\} + 1 \Leftrightarrow 1 \leq \{x\} + \{y\} < 2.$$

□

Chứng minh 2 Ta luôn có

$$x + y - 1 < [x+y] \leq x + y;\ \ x - 1 < [x] \leq x;\ \ y - 1 < [y] < y$$

hay

$$x + y - 1 < [x+y] \leq x + y;\ \ -x \leq -[x] < -x + 1;\ \ -y \leq -[y] < -y + 1.$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức này ta được $-1 < [x+y] - [x] - [y] < 2$.
Vì $[x+y] - [x] - [y]$ nguyên nên chỉ có thể xảy ra

$$[x+y] - [x] - [y] = 0 \text{hoặc } [x+y] - [x] - [y] = 1,$$

tức là $[x+y] = [x] + [y]$ hoặc $[x+y] = [x] + [y] + 1$.
Vậy Bổ đề 2 đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.
Nhận xét Ta có thể viết lại Bổ đề 2 dưới dạng các tính chất sau đây, tiện dùng hơn trong các bài tập.

Tính chất 1 $[x] + [y] = \begin{cases} [x+y] & \text{khi} \quad 0 \leq \{x\} + \{y\} < 1; \\ [x+y] - 1 & \text{khi} \quad 1 \leq \{x\} + \{y\} < 2. \end{cases}$

Tính chất 2 $[x] - [y] = \begin{cases} [x-y] & \text{khi} \quad \{y\} < \{x\}; \\ [x-y] + 1 & \text{khi} \quad \{x\} < \{y\}. \end{cases}$

Bổ đề 3. *Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có*

$$\left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x]-[x] \text{ và } \left[\{x\}+\frac{1}{2}\right] = [2\{x\}].$$

Chứng minh. Vì

$$\left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x]-[x] \Leftrightarrow \left[[x]+\{x\}+\frac{1}{2}\right] = [2([x]+\{x\})]-[x]$$

$$\Leftrightarrow [x]+\left[\{x\}+\frac{1}{2}\right] = 2[x]+[2\{x\}]-[x] \Leftrightarrow \left[\{x\}+\frac{1}{2}\right] = [2\{x\}]$$

nên chỉ cần chứng minh đẳng thức $\left[\{x\}+\frac{1}{2}\right] = [2\{x\}]$. (*)

Trường hợp 1. $0 \le \{x\} < \frac{1}{2}$.

Khi ấy $2\{x\} < 1$ và $\{x\}+\frac{1}{2} < 1$ hay $[2\{x\}] = 0 = \left[\{x\}+\frac{1}{2}\right]$. Vậy (*) đúng.

Trường hợp 2. $\frac{1}{2} \le \{x\} < 1$. Khi ấy

$1 \le 2\{x\} < 2$ và $1 \le \{x\}+\frac{1}{2} < 1\frac{1}{2} < 2$ hay $[2\{x\}] = 1 = \left[\{x\}+\frac{1}{2}\right]$.

Chứng tỏ (*) cũng đúng. Vậy Bổ đề 3 được chứng minh với mọi $x \in \mathbb{R}$. □

Phương trình chứa phần nguyên

1 Phương trình chứa một dấu phần nguyên $[f(x)] = \varphi(x)$

Trước tiên ta xem xét một số lớp phương trình đơn giản dạng này.

1.1 Một số lớp phương trình đơn giản

1.1.1 Phương trình $[a] = \varphi(x)$, trong đó a là một số không phụ thuộc x. Thực chất đây là phương trình đại số. Nói chung nó có hữu hạn nghiệm.

Bài 1 Giải phương trình: 1) $[5,75]+x=8$; 2) -4,7 + 1,3 - x = 8,4.

Giải 1) $[5,75]+x=8 \Leftrightarrow 5+x=8 \Leftrightarrow x=3$.

2) $\{-4,7\}+1,3-x=8,4 \Leftrightarrow 0,3+0,3-x=8,4 \Leftrightarrow x=-7,8$.

1.1.2 Phương trình $[x]=m$ có nghiệm khi và chỉ khi m là số nguyên. Khi ấy nó tương đương với bất phương trình kép $m \le x \le m+1$. Do đó phương trình $[x]=m$ nếu có thì luôn có vô số nghiệm (nghiệm là nửa khoảng $[m;m+1)$).

Nhận xét 1 Tương tự như phương trình chứa trị tuyệt đối, nhiều phương trình chứa phần nguyên có nhiều nghiệm, thậm chí có vô số nghiệm hoặc nghiệm là cả một khoảng nào đó của đường thẳng thực.

Bài 2 Giải phương trình: 1) $[x]+1=-7$; 2) $[x]+0,3=7,4$; 3) $\{x\}=0$.

Giải Từ định nghĩa ta có: 1) $[x]+1=-7 \Leftrightarrow [x]=-8 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq -7$.

2) $[x]+0,3=7,4 \Leftrightarrow [x]=7,1$. Phương trình vô nghiệm vì $7,1 \notin \mathbb{Z}$.

3) $\{x\}=0 \Leftrightarrow$ mọi $x \in \mathbb{Z}$.

1.1.3 Phương trình $[ax]=m$ với a là số thực bất kì, còn m là số nguyên.

Giải Phương trình $[ax]=m$ (m nguyên) tương đương với $m \leq ax < 1+m$. Nếu $a=0$ thì mọi $x \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình đã cho khi $m=0$ và phương trình vô nghiệm khi $m \neq 0$. Nếu $a \neq 0$ thì bất phương trình $m \leq ax < 1+m$ tương đương với $ax = m+\theta$ với θ là một số thực bất kì trong khoảng $[0;1)$.

1.1.4 Phương trình dạng $[ax+b]=c (a \neq 0)$

Phương trình $[ax+b]=c$ có nghiệm khi và chỉ khi c là một số nguyên. Khi ấy nó tương đương với bất phương trình kép $c \leq ax+b < c+1$. Vì đồ thị của hàm $y=ax+b$ với $a \neq 0$ luôn cắt các đường thẳng song song $y=c$ và $y=c+1$ tại các điểm $x=\dfrac{c-b}{a}$ và $x=\dfrac{c+1-b}{a}$ nên nghiệm của phương trình là khoảng $\left[\dfrac{c-b}{a};\dfrac{c+1-b}{a}\right)$ nếu $a>0$ và $\left[\dfrac{c+1-b}{a};\dfrac{c-b}{a}\right)$ nếu $a<0$

Bài 3 Giải các phương trình $[2x-7,5]=-2$.

Giải $[2x-7,5]=-2 \Leftrightarrow -2 \leq 2x-7,5 < (-2)+1 \Leftrightarrow 2,75 \leq x, 3,25$.

1.1.5 Phương trình chứa phần nguyên của hàm bậc hai

$$[ax^2+bx+c]=d (a \neq 0) \tag{1}$$

Để (1) có nghiệm thì d phải là một số nguyên. Tùy nhiên điều kiện này chưa phải là điều kiện đủ. Phương trình (1) tương đương với phương trình kép $d \leq ax^2+bx+c < d+1$. Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi đỉnh $S\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ của parabol $y=ax^2+bx+c$ nằm dưới đường thẳng $y=d+1$ khi $a>0$ và nằm trên đường thẳng $y=d$ khi $a<0$, nghĩa là 1 có nghiệm khi và chỉ khi d là một số nguyên và $-\dfrac{b^2-4ac}{4a} < d+1$ khi $a>0$ và $-\dfrac{b^2-4ac}{4a} > d$ khi $a<0$.

1.2 Phương trình dạng $[f(x)]=\varphi(x)$

Phương pháp 1 *Sử dụng định nghĩa*

$$[f(x)]=\varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) & \leq f(x) < 1+\varphi(x); \\ \varphi(x) & \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Như vậy, để giải phương trình $[f(x)]=\varphi(x)$ ta đưa nó về giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} f(x)-\varphi(x) & \geq 0; \\ f(x)-\varphi(x) & < 1; \\ \varphi(x) & \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Trong những bài toán cụ thể, ta thường chỉ giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} f(x) - \varphi(x) & \le 0; \\ f(x) - \varphi(x) & < 1. \end{cases} \quad (*)$$

để được nghiệm, sau đó kiểm tra điều kiện $\varphi x \in \mathbb{Z}$ với các nghiệm tìm được. Ngược lại, trong một số bài tập, nhiều khi ta lại giải phương trình $\varphi(x) = z$ với z là số nguyên để được x, sau đó thử vào hệ (*) để được nghiệm.

1.2.1 Phương trình dạng $[ax + b] = \varphi(x)$

Bài 4 (Olympic 30.4 lần thứ 10, 2004, lớp 10. Đề dự tuyển, THPT chuyên Nguyễn Du, Đăk Lăk) Giải phương trình $x^2 + [x-1] = 2004$.

Giải Ta có $x^2 + [x-1] = 2004 \Leftrightarrow [x-1] = -x^2 + 2004$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2004 \le x - 1 < -x^2 + 2004 + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2005 & \ge 0 \\ x^2 + x - 2006 & < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{-1-\sqrt{8021}}{2}; x \ge \dfrac{-1+\sqrt{8021}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{8025}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{8025}}{2} \end{cases}$$

$\dfrac{-1-\sqrt{8025}}{2} < x \le \dfrac{-1-\sqrt{8021}}{2}$ hoặc $\dfrac{-1+\sqrt{8021}}{2} \le x < \dfrac{-1+\sqrt{8025}}{2}$.

Bài tập 5 Giải các phương trình:

1) $2[x + 0,7] + x - 15 = 0$; 2) $\left[\dfrac{2-5x}{4}\right] = -x$; 3) $\left[\dfrac{3x+1}{5}\right] = 2x - 1$;

4) $\left[\dfrac{7x-5}{3}\right] = \dfrac{16x+3}{5}$; 5) $\left[\dfrac{5+6x}{8}\right] = \dfrac{15x-7}{5}$; 6) $x^4 - 3x^2 - [x] = 0$.

Phương pháp 2 (Đặt ẩn phụ) *Đặt ẩn phụ* chứa phần nguyên để đưa về phương trình đại số. Giải phương trình đại số và sau đó thay ẩn phụ để giải phương trình chứa phần nguyên. Chú ý tới các điều kiện (thí dụ, phần nguyên của một số phải là số nguyên).

2 Phương trình chứa hai dấu phần nguyên $[f(x)] = [\varphi(x)] + \psi(x)$

Dạng 1 $[f(x)] = [\varphi(x)]$

Phương pháp 1 *Áp dụng Bổ đề 1* ta có

$$[f(x)] = [\varphi(x)] \Leftrightarrow -1 < f(x) - \varphi(x) < 1.$$

Khi áp dụng Bổ đề 1 thì ta được bất phương trình kép *không tương đương* với phương trình ban đầu. Vì vậy sau khi tìm được giá trị của x ta thường phải đưa phương trình chứa hai dấu phần nguyên về phương trình chứa một dấu phần nguyên để kiểm tra nghiệm.

Phương pháp 2 *Đưa về phương trình chứa một dấu phần nguyên* bằng cách *đặt một phần nguyên là tham số.* Giải và biện luận phương trình chứa một phần nguyên và chứa tham số.

Đặt $[f(x)] = m, m \in \mathbb{Z}$. Khi ấy phương trình $[f(x)] = [\varphi(x)]$ được tách thành hệ hai phương trình chứa một dấu phần nguyên:

$$[f(x)] = [\varphi(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} [f(x)] = & m; \\ [\varphi(x)] = & m. \end{cases}$$

Sử dụng định nghĩa ta có $\begin{cases} [f(x)] = & m; \\ [\varphi(x)] = & m. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le f(x) - m < 1; \\ 0 \le \varphi(x) - m < 1; \\ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Giải hệ bất phương trình ta đi đến hệ

$$\begin{cases} 0 \le f(x) - m < 1; \\ 0 \le \varphi(x) - m < 1; \\ m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(m) \le x < b_1(m); \\ a_2(m) \le x < b_2(m); \\ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Giải hai bất phương trình trên theo tham số m kết hợp với điều kiện m là một số nguyên ta tìm được các giá trị nguyên của m. Thay vào phương trình $[f(x)] = m$ và $[\varphi(x)] = m$ (hay vào các bất phương trình $m \le f(x) < m + 1$ và $m \le \varphi(x) < m + 1$) ta tìm được các giá trị của x và đi đến đáp số.

Vì giải hệ phương trình chứa tham số $\begin{cases} a_1(m) \le x < b_1(m); \\ a_2(m) \le x < b_2(m); \end{cases}$ là phức tạp, nên ta thường tìm điều kiện để hệ vô nghiệm, tức là:

Hoặc khoảng $[a_1(m); b_1(m))$ phải nằm hẳn về bên trái khoảng $[a_2(m); b_2(m))$, tức là $b_1(m) \le a_2(m)$;

Hoặc khoảng $[a_1(m); b_1(m))$ phải nằm hẳn về bên phải khoảng $[a_2(m); b_2(m))$, hay $b_2(m) \le a_1(m)$;

Từ đó suy ra các giá trị của m để hệ có nghiệm.

Bài 6 Giải phương trình $[x - 2,3] = [4 - x]$.

Giải Theo Bổ đề 1 ta có

$$[x - 2,3] = [4 - x] \Rightarrow -1 < (x - 2,3) - (4 - x) < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < 2x - 6,3 < 1 \Leftrightarrow 2,65 < x < 3,65.$$

Suy ra $0,35 < x - 2,3 < 1,35$. Do đó $[x - 2,3] = 0$ hoặc $[x - 2,3] = 1$. Tương tự, vì $2,65 < x < 3,65$ nên $0,35 < 4 - x < 1,35$ Suy ra $[4 - x] = 0$ hoặc $[4 - x] = 1$.

Trường hợp 1. $[x - 2,3] = [4 - x] = 0$.

Ta có: $[4 - x] = 0 \Leftrightarrow 0 \le 4 - x < 1 \Leftrightarrow 3 < x \le 4$;

$[x - 2,3] = 0 \Leftrightarrow 0 \le x - 2,3 < 1$ hay $2,3 \Leftrightarrow x < 3,3$.

Kết hợp hai điều kiện ta được: $3 < x < 3,3$.

Trường hợp 2. Phương trình này vô nghiệm vì:

$[x - 2,3] = 1 \Leftrightarrow 1 \le x - 2,3 < 2$ hay $3,3 \Leftrightarrow x < 4,3$;

$[4 - x] = 1 \Leftrightarrow 1 \le 4 - x < 2 \Leftrightarrow 2 < x \le 3$.

Không có x nào đồng thời thỏa mãn cả hai điều kiện trên.

Đáp số: $3 < x < 3,3$.

Bài tập 7 Giải các phương trình

1) $[2x-1,5]=[x-2,7]$; 2) $[x-1]=\left[\dfrac{x+2}{2}\right]$; 3) $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{x+1}{2}\right]$

4) $[x-2,3]=[4-x]$; 5) $[x^2+3x]=\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$.

Dạng 2 $[f(x)]=[\varphi(x)]+\psi(x)$

Phương pháp 1 *Sử dụng các tính chất 1 và 2.* Tuy nhiên khi áp dụng các tính chất này vào phương trình thì ta được hệ các bất phương trình *không tương đương* với phương trình ban đầu vì nó chỉ tương đương khi điều kiện nêu trong Tính chất 1 hoặc Tính chất 2 được thỏa mãn. Giải các điều kiện này tương đối phức tạp. Vì vậy sau khi tìm được giá trị của x ta thường đưa phương trình chứa hai dấu phần nguyên về phương trình chứa một dấu phần nguyên để kiểm tra nghiệm.

Bài 8 (Olympic 30-4 lần thứ 14, 2008, lớp 10. Đề dự tuyển, THPT chuyên Bến Tre) Giải phương trình

$$\left[\frac{8x+1}{6}\right]+\left[\frac{4x-1}{3}\right]=\left[\frac{16x-7}{9}\right]. \qquad (1)$$

Cách 1 Theo Tính chất 2 ta có

$\left[\dfrac{8x+1}{6}\right]+\left[\dfrac{4x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{8x+1}{6}+\dfrac{4x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{16x-1}{6}\right]$

khi $0\le\left\{\dfrac{8x+1}{6}\right\}+\left\{\dfrac{4x-1}{3}\right\}<1$ hoặc

$VT(1)=\left[\dfrac{8x+1}{6}\right]+\left[\dfrac{4x-1}{3}\right]=\left[\dfrac{8x+1}{6}+\dfrac{4x-1}{3}\right]-1=\left[\dfrac{16x-1}{6}\right]-1$

kh i$1\le\left\{\dfrac{8x+1}{6}\right\}+\left\{\dfrac{4x-1}{3}\right\}<2$.

Trường hợp 1 $VT(1)=\left[\dfrac{16x-1}{6}\right]=\dfrac{16x-7}{9}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\dfrac{16x-1}{6}\right]=\dfrac{16x-7}{9};\\ \dfrac{16x-7}{9}\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\dfrac{16x-1}{6}-\dfrac{16x-7}{9}<1\\ x=\dfrac{9k+17}{16},k\in\mathbb{Z}.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le 16x+11<18;\\ x=\dfrac{9k+17}{16},k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{11}{16}\le x<\dfrac{7}{16};\\ -\dfrac{11}{16}\le\dfrac{9k+17}{16}<\dfrac{7}{16},k\in\mathbb{Z}.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{11}{16}\le x<\dfrac{7}{16};\\ -2\le k<0,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-2;-1\\ x=-\dfrac{11}{16};-\dfrac{1}{8}\end{cases}$$

Thử lại ta thấy:

Với $x=-\dfrac{11}{16}$ thì $VT(1)=-1+(-2)=-3\ne VP(1)=-2$.

Với $x=-\dfrac{1}{8}$ thì $VT(1)=VP(1)=-1$. Vậy $x=-\dfrac{1}{8}$ là nghiệm của (1).

Trường hợp 2 $\left[\dfrac{16x-1}{6}\right]-1=\dfrac{16x-7}{9}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\dfrac{16x-1}{6}\right]=\dfrac{16x+2}{9};\\ \dfrac{16x+2}{9}\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\dfrac{16x-1}{6}-\dfrac{16x+2}{9}<1\\ x=\dfrac{9k-2}{16},k\in\mathbb{Z}.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le 16x-7<18;\\ x=\dfrac{9k-2}{16},k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{16} \le x < \dfrac{25}{16}; \\ \dfrac{7}{16} \le \dfrac{9k-2}{16} < \dfrac{25}{16}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{16} \le x < \dfrac{25}{16}; \\ 1 \le k < 3, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1; 2 \\ x = \dfrac{7}{16}; 1 \end{cases}$$

Thử lại:

Với $x = 1$ thì $VT(1) = 2 \neq VP(1) = 1$.

Với $x = \dfrac{7}{16}$ thì $VT(1) = VP(1) = 0$. Vậy $x = \dfrac{7}{16}$ là nghiệm của (1).

Cách 2 *Sử dụng Bổ đề 3* Đặt $y = \dfrac{4x-1}{3} = \dfrac{4x}{3} - \dfrac{1}{3}$ thì $\dfrac{8x+1}{6} = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{6} = y + \dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{16x-7}{9} = \dfrac{4}{3}.\dfrac{4}{3}x - \dfrac{7}{9} = \dfrac{4}{3}y - \dfrac{1}{3} = \dfrac{4y-1}{3}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\left[y + \frac{1}{2}\right] + [y] = \frac{4y-1}{3}. \tag{2}$$

Theo Bổ đề 3 ta có $[y] + \left[y + \dfrac{1}{2}\right] = [2y]$. Thay vào (1) ta được

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow [2y] = \frac{4y-1}{3}. \tag{3}$$

Đặt $t = \dfrac{4y-1}{3}$. Khi ấy $t \in \mathbb{N}$ và $y = \dfrac{3t-1}{4}$. Phương trình (3) trở thành

$(3) \Leftrightarrow \left[\dfrac{3t+1}{2}\right] \Leftrightarrow t \le \dfrac{3t+1}{2} < t + 1 \Leftrightarrow -1 \Leftrightarrow t < 1$.

Do $t \in \mathbb{N}$ nên $t = -1$ hoặc $t = 0$.

Với $t = -1$ ta có $y = \dfrac{3t+1}{4} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3y+1}{4} = -\dfrac{1}{8}$.

Với $t = 0$ ta có $y = \dfrac{3t+1}{4} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = \dfrac{3y+1}{4} = \dfrac{7}{16}$.

Đáp số: $x = -\dfrac{1}{8}$ và $x = \dfrac{7}{16}$.

Phương pháp 2 *Đặt ẩn phụ* $[f(x)] = m, m \in \mathbb{Z}$. Khi ấy phương trình $[f(x)] = [\varphi(x)] + \psi(x)$ được tách thành hệ hai phương trình chứa một phần nguyên $[f(x)] = [\varphi(x)] + \psi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} [f(x)] = m; \\ [\varphi(x)] + \psi(x) = m. \end{cases}$ Sử dụng định nghĩa ta có:

$$\begin{cases} [f(x)] = m; \\ [\varphi(x)] = m - \psi(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le f(x) - m < 1; \\ 0 \le \varphi(x) - (m - \psi(x)) < 1; \\ m - \phi(x) \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(m) \le x < b_1(m); \\ a_2(m) \le x < b_2(m). \end{cases}$$

Giải hai bất phương trình này theo tham số m, kết hợp với điều kiện m là một số nguyên, ta tìm được các giá trị nguyên của m. Thay vào phương trình $[f(x)] = m$ và $[\varphi(x)] + \psi(x) = m$ để tìm các giá trị của x và đi đến đáp số.

Bài 9 Giải phương trình $3[x]^2 + 5[x] = 2$.

Giải Đặt $[x] = y, y \in \mathbb{Z}$. Phương trình trở thành $3y^2 + 5y - 2 = 0$. Suy ra $y = -2$ hoặc $y = -\dfrac{1}{3}$ (loại do $y \in \mathbb{Z}$). Vậy $[x] = y = -2$. *Đáp số:* $-2 \le x < -1$.

Bài tập 10 Giải phương trình a) $[x]^2 - 2[x] - 3 = 0$; b) $[x]^2 - [x] - 2 = 0$.

Phương pháp 3 (Chia khoảng) *Chia trục số thành một số khoảng.* Giải phương trình trong từng khoảng để bỏ phần nguyên, chuyển phương trình chứa phần nguyên về hệ bất phương trình không chứa phần nguyên.

Bài tập 11 Giải các phương trình sau:

1) $[x - 7,5] + [7,5 - x] = 2$; 2) $[x - 1] - [-x] = -2$;

3) $[x - 2] + [2x + 1] = x + 5,3$; 4) $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = 17$; 5) $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = x$;

6) $\left[\frac{1-x}{2}\right] + \left[1 - \frac{x}{2}\right] = \frac{1-3x}{8}$; 7) $\left[\frac{3}{x}\right] + \left[\frac{4}{x}\right] = 5$.

Bài tập 11 (Olympic 30.4 lần thứ 13, 2007, lớp 10. Đề dự tuyển) Tìm tất cả các nghiệm không nguyên của phương trình $x + \frac{96}{x} = [x] + \frac{96}{[x]}$.

3 Phương trình chứa nhiều dấu phần nguyên

Phương pháp giải: *Dùng định nghĩa* hoặc *đặt ẩn phụ* để đưa về phương trình có ít phần nguyên hơn.

Bài 12 Giải phương trình $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] = x$.

Cách 1 Đặt $\left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] = m, m \in \mathbb{Z}$. Khi ấy phương trình trở thành:

$$\left[\frac{x}{2}\right] = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{x}{2} - (x - m) < 1; \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m-1) < x \le 2m; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases} \qquad (*)$$

Vì x nguyên và $2(m-1) < x \le 2m$ nên chỉ có thể là: $x = 2m - 1$ hoặc $x = 2m$. Thay $x = 2m$ vào phương trình $\left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] = m$ ta có: $\left[\frac{2m}{3}\right] + \left[\frac{2m}{4}\right] = m$. Nhưng $\left[\frac{2m}{3}\right] + \left[\frac{2m}{4}\right] = \left[\frac{2m}{3} + \frac{2m}{4}\right] = \left[\frac{7m}{6}\right]$ hoặc $\left[\frac{2m}{3}\right] + \left[\frac{2m}{4}\right] = \left[\frac{2m}{3} + \frac{2m}{4}\right] - 1 = \left[\frac{7m}{6}\right] - 1$.

Vậy phương trình tương đương với $\left[\frac{7m}{6}\right] = m$ hoặc $\left[\frac{7m}{6}\right] - 1 = m$

$\Leftrightarrow 0 \le \frac{7m}{6} - m < 1$ hoặc $0 \le \frac{7m}{6} - (m+1) < 1$

$\Leftrightarrow 0 \le m < 6$ hoặc $6 \le m < 12 \Leftrightarrow 0 \le m < 12$.

Vì m nguyên nên m chỉ có thể là: $m = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11$. Với $m = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11$ thì $x = 2m = 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22$.

Thử vào phương trình $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] = x$ ta được: $x = 0; 4; 6; 8; 10; 14$.

Thay $x = 2m - 1$ vào phương trình $\left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] = m$ ta có: $\left[\frac{2m-1}{3}\right] + \left[\frac{2m-1}{4}\right] = m$.

Nhưng $\left[\frac{2m-1}{3}\right] + \left[\frac{2m-1}{4}\right] = \left[\frac{2m-1}{3} + \frac{2m-1}{4}\right] = \left[\frac{14m-7}{12}\right]$ hoặc $\left[\frac{2m-1}{3}\right] + \left[\frac{2m-1}{4}\right] = \left[\frac{2m-1}{3} + \frac{2m-1}{4}\right] - 1 = \left[\frac{14m-7}{12}\right] - 1$

nên phương trình $\left[\frac{2m-1}{3}\right] + \left[\frac{2m-1}{4}\right] = m$ tương đương với $\left[\frac{14m-7}{12}\right] = m$ hoặc

$\left[\dfrac{14m-7}{12}\right]-1=m$
$\Leftrightarrow 0 \le \dfrac{14m-7}{12} - m < 1$ hoặc $0 \le \dfrac{14m-7}{12} - (m+1) < 1$
$\Leftrightarrow \dfrac{7}{2} \le m < \dfrac{19}{2}$ hoặc $\dfrac{19}{2} \le m < \dfrac{31}{2} \Leftrightarrow \dfrac{7}{2} \le m < \dfrac{31}{2}$.
Vì m nguyên nên m chỉ có thể là: $m = 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15$.
Suy ra $x = 2m = 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29$.
Thử vào phương trình $\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{x}{3}\right]+\left[\dfrac{x}{4}\right]=x$ ta được: $x = 9; 13; 15; 17; 19; 23$. Kết hợp cả hai trường hợp ta đi đến
Đáp số : $x = 0; 4; 6; 8; 10; 14; 9; 13; 15; 17; 19; 23$.

Cách 2 Từ phương trình $\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{x}{3}\right]+\left[\dfrac{x}{4}\right]=x$ suy ra $x \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên chia x cho 12 ta được: $x = 12a + r$ ($a \in \mathbb{Z}$, r là một trong các số 0, 1, 2,..., 10, 11). Khi ấy
$\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{x}{3}\right]+\left[\dfrac{x}{4}\right]=x \Leftrightarrow \left[\dfrac{12a+r}{2}\right]+\left[\dfrac{12a+r}{3}\right]+\left[\dfrac{12a+r}{4}\right]=12a+r$
$\Leftrightarrow 6a+4a+3a+\left[\dfrac{r}{2}\right]+\left[\dfrac{r}{3}\right]+\left[\dfrac{r}{4}\right] = 12a+r \Leftrightarrow a = r-\left[\dfrac{r}{2}\right]-\left[\dfrac{r}{3}\right]-\left[\dfrac{r}{4}\right]$. Cho $r = 0, 1, 2, \dots, 10, 11$ ta được đáp số tương ứng trong bảng sau:

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
x	0	13	14	15	4	17	6	19	8	9	10	23

Cách 3 Theo tính chất $[x] \le x < [x]+1$ ta có

$$\left[\frac{x}{2}\right] \le \frac{x}{2} < \left[\frac{x}{2}\right]+1; \left[\frac{x}{3}\right] \le \frac{x}{3} < \left[\frac{x}{3}\right]+1; \left[\frac{x}{4}\right] \le \frac{x}{4} < \left[\frac{x}{4}\right]+1.$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên và sử dụng đầu bài ta được

$$\begin{cases} x \le \dfrac{13x}{12} < x+3; \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x \le 13x < 12x+36; \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 36; \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy $x \in \{0, 1, 2, \dots, 35\}$. Lần lượt thay $x = 0, 1, 2, \dots, 35$ vào phương trình và thử lại ta được *Đáp số:* $x = 0; 4; 6; 8; 10; 14; 9; 13; 15; 17; 19; 23$.

Bài tập 13 (Olympic Canada, 1998) Xác định số nghiệm của phương trình

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{5}\right]=x.$$

Bài tập 14 Tìm nghiệm nguyên của các phương trình
1) $\left[\dfrac{x}{1!}\right]+\left[\dfrac{x}{2!}\right]+\left[\dfrac{x}{3!}\right]=224$; 2) $\left[\dfrac{x}{1!}\right]+\left[\dfrac{x}{2!}\right]+\left[\dfrac{x}{3!}\right]+\dots+\left[\dfrac{x}{10!}\right]=1001$.

Bài tập 15 (Olympic 30.4 lần thứ 15, 2009, lớp 10. Đề dự tuyển) Giải phương trình
$[x]+\left[x+\dfrac{1}{10}\right]+\left[x+\dfrac{2}{10}+\dots+\left[x+\dfrac{9}{10}\right.\right.=[x+1]$.

Bài tập 16 (AIME, 1991) Tìm $[100r]$ biết rằng r là số thực thỏa mãn

$$\left[r + \frac{19}{100}\right] + \left[r + \frac{20}{100}\right] + \ldots + \left[x + \frac{91}{100}\right] = 546.$$

4. Phương trình dạng hỗn hợp

Có những phương trình chứa cả phần nguyên và phần dư, hoặc phần nguyên vớ các phép toán khác (lũy thừa, căn thức,...), ta xếp chúng vào dạng *phương trình hỗn hợp* Giải chúng nói chung là khó, cần kết hợp nhiều suy luận và kĩ thuật khác nhau, như dùng định nghĩa, chia khoảng, sử dụng tính chất số nguyên của $[x]$ hoặc tính chất $0 \le \{x\} <$ 1 các tính chất x nguyên khi và chỉ khi $\{x\} = 0$ hoặc $x = [x]$, các phương pháp của đại số như đặt ẩn phụ, biến đổi tương đương hệ phương trình,... Các bài dưới đây là những v dụ.

Bài 17 (Olympic 30.4 lần thứ 10, 2004, lớp 10. Đề dự tuyển, THPT Phan Châu Trinh, Đà Nẵng) Giải phương trình $[x^2 - 2x] + 2[x] = [x]^2$.

Giải (Phương pháp khoảng) Trước hết xét

Trường hợp 1. $x \ge 1$.

Để ý rằng với mọi số tự nhiên n ta có $n - 1 < \sqrt{n^2 - 2n + 2} \le n$..

Xét $n \le x < n + 1$. Khi ấy $[x] = n$.

Trường hợp 1a. $n \le x < \sqrt{n^2 - 2n + 2} + 1$. Ta có $n - 1 \le x - 1 < \sqrt{n^2 - 2n + 2}$. Suy r

$n^2 - 2n + 1 \le x^2 - 2x + 1 < n^2 - 2n + 2$ hay

$n^2 - 2n \le x^2 - 2x < n^2 - 2n + 1$ nên $[x^2 - 2x] = n^2 - 2n$.

Vì $[x^2 - 2x] + 2[x] = n^2 - 2n + 2n = n^2 = [x^2]$ nên phương trình (1) đúng với mọ

$n \le x < \sqrt{n^2 - 2n + 2} + 1$.

Trường hợp 1b. $\sqrt{n^2 - 2n + 2} + 1 \le x < n + 1$. Ta có $\sqrt{n^2 - 2n + 2} \le x - 1 < n$.

Suy ra $n^2 - 2n + 2 \le (x - 1)^2 < n^2$ hay $n^2 - 2n + 1 \le x^2 - 2x$.

Vậy $n^2 - 2n + 1 \le [x^2 - 2x]$.

Chứng tỏ $[x^2 - 2x] + 2[x] \ge (n - 1)^2 + 2n > n^2 = [x]^2$

hay $\sqrt{n^2 - 2n + 2} \le x < n + 1$ không là nghiệm của (1).

Trường hợp 2. $0 < x < 1$. Khi ấy $[x] = 0$. Ta có $-1 < x - 1 < 0$ hay

$0 < x^2 - 2x + 1 < 1 \Leftrightarrow -1 < x^2 - 2x < 0 \Leftrightarrow [x^2 - 2x] = -1$.

Vì $[x] = 0$ nên $[x^2 - 2x] + 2[x] = -1 < 0 = [x]^2$. Vậy $0 < x < 1$ không là nghiệm của (1

Nếu $x = 0$ hiển nhiên ta có $[x^2 - 2x] + 2[x] = [x]^2$.

Trường hợp 3. $x = -n, n = 0, 1, 2, \ldots$ Khi ấy (1) đúng vì

$$[x^2 - 2x] + 2[x] = [n^2 - 2n] + 2[n] = n^2 = [x]^2.$$

Chứng tỏ mọi $x = -n, n = 0, 1, 2, \ldots$ là nghiệm của (1).

Trường hợp 4. $x < 0$. Giả sử $x \in (-n; -n + 1), n = 1, 2, \ldots$.

Khi ấy $[x] = -n$ và $-n < x < -n + 1$ hay $-n - 1 < x - 1 < -n$.

Suy ra $x^2 - 2x + 1 < n^2 + 2n + 1$. Vậy $[x^2 - 2x] < n^2 + 2n$. Từ đó ta có

$$[x^2 - 2x] + 2[x] < (n^2 + 2n) - 2n = n^2 = [x]^2.$$

Vậy mọi $x \in (-n; -n + 1), n = 1, 2, \ldots,$ không là nghiệm của (1).

Đáp số: Nghiệm của phương trình đã cho là mọi số nguyên không dương hoặc x $[n; \sqrt{n^2 - 2n + 2} + 1)$, n = 1, 2, ...

Bài tập 18 Giải các phương trình và bất phương trình :
1) $[x^2] = [x]^2$; 2) $x^2 = \{x\}^2$; 3) $[x^2] + [x] = \{x\} + 2$; 4) [x]x < x-1.
5) (Vô địch Áo, 1973) $1 - |x+1| = \dfrac{[x] - x}{|x-1|}$.
6) (Vô địch Thụy Điển, 1982) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, hãy xác định xem phương trình $x^2 - [x^2] = \{x\}^2$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[1; n]$.
Bài tập 19 1) (Olympic 30.4 lần thứ 13, 2007, Đề dự tuyển, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \cdots + [\sqrt{x^2}] + [\sqrt{x^2+1}] + [\sqrt{x^2+2}] = 5190.$$

2) (Tạp chí CRUX, Bài M186) Cho $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} = 217$. Xác định n.
3) (Vô địch Anh, 1975) Tìm số tự nhiên x thỏa mãn phương trình:

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \cdots + [\sqrt[3]{x^3 - 1}] = 400.$$

4) (Olympic 30.4 lần thứ 15, 2009, lớp 10. Đề dự tuyển, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định) Tìm số nguyên dương n thoả mãn

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{2}] + \cdots + [\sqrt[3]{n^3 - 1}] = 85n^2.$$

5) Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn phương trình

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{2}] + \cdots + [\sqrt[3]{n^3 - 1}] = y.$$

6) (Olympic 30.4 lần thứ 9, 2003, lớp 10. Đề dự tuyển, THPT Bến Tre) Tìm số n nguyên dương sao cho $[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + [\sqrt[3]{2}] + \cdots + [\sqrt[3]{n^3 + 2n + 4}] = 7225$.
Bài tập 20 (Olympic Belarus, 1999) Chứng tỏ rằng phương trình $\{x^3\} + \{y^3\} = \{x^3\}$ có vô số nghiệm hữu tỉ không nguyên.
Bài tập 21 Tìm tất cả các cặp số thực (x, y) với $0 < x \le 1 \le y < 4$ sao cho tồn tại một số nguyên dương k thoả mãn $k[xy] = k + x + y$.
Bài tập 22 (Olympic 30.4 lần thứ 13, 2007, lớp 11. Đề dự tuyển) Tìm tất cả các số thực $x \neq 0$ sao cho ba số $x, [x], \{x\}$, theo thứ tự ấy, lập thành cấp số nhân.
Bài tập 23 1) Tìm các số thỏa mãn hệ ba phương trình

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = & 1,1; \qquad (1) \\ y + [z] + \{x\} = & 2,2; \qquad (2) \\ z + [x] + \{y\} = & 3,3. \qquad (3) \end{cases}$$

2) (Vô địch Australia, 1999) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} = & 200,0; \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor = & 190,1; \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z = & 178,8. \end{cases}$$

Bài tập 24 (Olympic Czech and Slovak lần thứ 47, 1998) Tìm tất cả các số thực x sao cho $x\lfloor x \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor \rfloor = 88$.

Bài tập 25 (Olympic 30.4 lần thứ 14, 2008, lớp 10. Đề dự tuyển, THPT chuyên Trà Vinh) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương (x, y) của phương trình

$30^x + 4^x + [A]^x = y^{2008}$, trong đó $A = \sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt[2009]{\frac{2009}{2008}}$.

Bài tập 26 (Olympic 30.4 lần thứ 13, 2007, lớp 11. Đề dự tuyển) Với giá trị nguyên dương nào của n thì phương trình $2007^x + x - [\log_{1+2007^{-n}} e] = 0$ có nghiệm $x \in (1; 2)$.

Bài tập 27 (Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*, Số 112, tháng 1.1980, Bài 1/109) Cho phương trình $(-1)^{[x]}\left(x - 2[\frac{x}{2}] - 1\right) = \{x\} - 1$.

Người ta lấy 1979 nghiệm không âm $x_1, x_2, \ldots, x_{1979}$ của phương trình đó thỏa mãn điều kiện $x_{n+1} - x_n \geq \frac{1}{2}, n = 1, 2, \ldots, 1978$.

1) Tìm giá trị nhỏ nhất có thể xảy ra của x_{1979}.

2) Khi x_{1979} nhận giá trị nhỏ nhất thì trong số 1979 nghiệm nói trên có thể có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm nguyên và ít nhất bao nhiêu nghiệm nguyên?

Một số nhận xét về phương pháp giải phương trình chứa phần nguyên

Nhận xét 1 Các phương pháp cơ bản để giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối (dùng định nghĩa, chia khoảng, đặt ẩn phụ, biến đổi tương đương,...) cho phép gần như dễ dàng đưa về phương trình đại số trên từng khoảng. Do đó phương trình chứa trị tuyệt đối nói chung dễ giải. Mặc dù có những nét tương đồng, nhưng phương trình chứa phần nguyên thường đòi hỏi phải khai thác đặc thù của phương trình nhiều hơn là sử dụng các phương pháp cơ bản. Thí dụ,

Bài 28 Giải phương trình $x^4 = 2x^2 + [x]$.

Giải Mặc dù đây chỉ là phương trình dạng $[f(x)] = \varphi(x)$, nhưng cách giải đòi hỏi khai thác kĩ hơn đặc thù của phần nguyên.

Phương trình đã cho tương đương với $[x] = x^2(x^2 - 2)$ (1)

Suy ra $\begin{cases} 0 \leq x^2(x^2-2) - x < 1; \\ x^2(x^2-2) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Bất phương trình $0 \leq x^2(x^2 - 2) - x < 1$ tương đương với hệ hai bất phương trình

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 - x \geq 0; \\ x^4 - 2x^2 - x - 1 < 0. \end{cases}$$

Vì $x^4 - 2x^2 - x = x(x^3 - 2x - 1) = x(x+1)(x^2 - x - 1)$ nên bất phương trình $x^4 - 2x^2 - x > 0$ có nghiệm là $x \leq -1$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 0$ hoặc $x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ta thấy $x \leq -1$ thì $[x] = -1; -2; \ldots$

Với $[x] = -1$ thì phương trình $[x] = x^2(x^2 - 2)$ trở thành $-1 = t(t-2)$với $t = x^2$ hay $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Do $[x] = -1$ nên ta có $x = -1$.

Với $[x] = -2$ thì $x \leq -2 \Rightarrow x^2 geq 4 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) > 0$.

Phương trình $[x] = x^2(x^2 - 2) \Leftrightarrow t^2 - 2t + 2$ không có nghiệm.

Với $[x] = -3; -4; \ldots$ thì $x < -2 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) > 0$.

Phương trình $[x] = x^2(x^2 - 2)$ không có nghiệm. Với $\frac{1 - sqrt5}{2} \leq x \leq 0$ thì $[x] = -1$ hoặc

$[x] = 0$.
Thay $[x] = 0$ vào phương trình $[x] = x^2(x^2-2)$ ta thấy $x = 0$ là nghiệm, còn $[x] = -1$ là nghiệm đã xét ở trên.
Với $x \geq \dfrac{1+sqrt5}{2} > 1$ thì ta viết phương trình $[x] = x^2(x^2-2)$ dưới dạng $\dfrac{[x]}{x} = x^2(x^2-2)$.
Do $0 < \dfrac{[x]}{x} \leq 1$ và $x > 1$ nên ta phải có $0 < x^2-2 < 1$ hay $2 < x^2 < 3$, tức là $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$ hoặc $-\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}$.
Do $x > 1$ nên $1 < \sqrt{2} < x < \sqrt{3} < 2$. Vậy $[x] = 1$. Do đó ta có phương trình $x^2(x^2-2) = 1$ hay $t(t-2) = 1$ với $t = x^2$.
Phương trình $t(t-2) = 1$ tương đương với $t^2 - 2t - 1 = 0$ có hai nghiệm $t = 1 \pm \sqrt{2}$. Suy ra $x^2 = 1 + \sqrt{2}$ hay $x = \pm\sqrt{(1+\sqrt{2})}$. Vì $[x] = 1$ nên $x = \sqrt{(1+\sqrt{2})}$.

Đáp số: $x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = \sqrt{(1+\sqrt{2})}$.

Nhận xét 2 Một số bài toán phát biểu không có phần nguyên tham gia, nhưng có thể đưa về phương trình nghiệm nguyên.

Bài 29 (Thi nghiên cứu sinh, Đại học Indiana) Cho hàm số $f : [0,1) \to [0,1)$ được xác định bởi công thức $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } 0 \leq 2x < 1; \\ 2x-1, & \text{khi } 1 \leq 2x < 2. \end{cases}$
Hãy tìm tất cả $x \in [0,1)$ sao cho $f(f(f(f(f(f(x)))))) = x$.
Giải Nếu $0 \leq \frac{1}{2}$ thì $0 \leq x < 1$ nên $f(x) = 2x = 2x - [2x] = \{2x\}$.
Nếu $\frac{1}{2} \leq 1$ thì $1 \leq x < 2$ nên $f(x) = 2x - 1 = 2x - [2x] = \{2x\}$.
Tóm lại ta có $f(x) = 2x - [2x] = \{2x\}$ với mọi $x \in [0,1)$. Do đó

$$f(f(f(f(f(f(x)))))) = 2.2.2.2.2.2x.$$

Vì với mọi số thực a ta có

$$\begin{aligned} \{n.a\} &= n\{a\} - [n.a] = n(a - [a]) - [n.(a - [a])] \\ &= na - n[a] - [na - n[a]] = na = n[a] - [na] - (-n[a]) \\ &= na - [na] = na \end{aligned}$$

nên phương trình (1) trở thành

$$f(f(f(f(f(f(x)))))) = \{2^6x\} = \{64x\} = x.$$

Nhận xét rằng $x = \{64x\} = 64x - [64x]$ khi và chỉ khi $63x = [64x]$, tức là

$$\begin{cases} 63x &= [64x] \leq 64x < 63 + 1; \\ 63 &\in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 0 & \leq x < 1 \\ 63x & \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Đáp số: $x = \dfrac{k}{63}, k = 0, 1, 2, \ldots$.

Bài tập 30 (APMO, 2001) Tìm số nguyên dương lớn nhất N sao cho số tất cả các số trong tập $\{1, 2, ..., N\}$ chia hết cho 3 bằng số tất cả các số chia hết cho 5 hoặc 7 hoặc cả hai.

Kết luận Phần nguyên, trong đó có Phương trình chứa phần nguyên, là một chuyên đề tốt bồi dưỡng học sinh giỏi (ngay cả Trung học Cơ sở). Hi vọng rằng bài viết này cũng là một nguồn tư liệu tốt giúp các thày cô giáo và các bạn học sinh khai thác, phát triển và sáng tạo thêm những bài toán mới về phần nguyên.

Tài liệu

[1] Phan Huy Khải, *Các bài toán về hàm số học* (Chuyên đề 4 trong bộ sách *Các chuyên đề học sinh giỏi toán trung học*), NXB Giáo dục, Hà Nội, 2006.

[2] Hà Huy Khoái, *Số học*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 2006.

[3] Nguyễn Vũ Lương (chủ biên), Nguyễn Lưu Sơn, Nguyễn Ngọc Thắng, Phạm Văn Hùng, *Các bài giảng về số học*, Tập 2, NXB ĐH QG Hà Nội, 2006.

[4] Nguyễn Thị Bình Minh, Nguyễn Hồng Hạnh, Tạ Duy Phượng, *Phần nguyên và Ứng dụng trong giải toán*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội (Sẽ ra).

[5] Phạm Thị Bạch Ngọc, *Chuyên đề cho Đại số lớp 9: Phần nguyên và ứng dụng*, Kỉ yếu Hội nghị Khoa học *Các Chuyên đề toán học bồi dưỡng học sinh giỏi*, Hà Nội, 26-27/4/2012. Chủ biên: Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Hữu Độ, Hội toán học Hà Nội, 2012, trang 278-286.

[6] Nguyễn Văn Nho, *Chuyên đề số học*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh, 2005.

Vành các số nguyên Gauss và phương trình Diophante

Lưu Bá Thắng

Khoa Toán Tin, Trường Đại học Sư Phạm Hà Nội

Trong bài viết này, chúng tôi nghiên cứu vành số nguyên Gauss $\mathbb{Z}[i]$ và ứng dụng của nó trong việc giải một số phương trình Diophante.

1 Vành số nguyên Gauss

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại khái niệm vành số nguyên Gauss và một vài tính chất số học của nó.

Định nghĩa 1. *Vành các số nguyên Gauss là vành có dạng*

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

trong đó $i^2 = -1$.

Nếu $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ thì $\alpha \pm \beta, \alpha\beta \in \mathbb{Z}[i]$.

Với $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$, ta định nghĩa $\overline{\alpha} = a - bi$ là một phần tử liên hợp của α và chuẩn $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2$. Khi đó

- $N(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.
- $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ là hàm có tính chất nhân tức $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

Quan hệ chia hết, phần tử khả nghịch, phần tử bất khả qui

Cho hai số nguyên Gauss α và β. Ta nói α là **ước** của β hay β là **bội** của α nếu tồn tại số nguyên Gauss γ sao cho $\alpha\gamma = \beta$. Kí hiệu $\alpha|\beta$.

Số nguyên Gauss được gọi là khả nghịch nếu nó là ước của 1.

Proposition 2. *Tập các phần tử khả nghịch trong vành các số nguyên Gauss chỉ là* $\{\pm 1, \pm i\}$.

Chứng minh. Giả sử α là phần tử khả nghịch, khi đó tồn tại số nguyên Gauss β sao cho $1 = \alpha\beta$. Ta có $1 = N(1) = N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$. Từ $N(\alpha), N(\beta) \in \mathbb{N}$ nên $N(\alpha) = 1$. Suy ra $\alpha \in \{\pm 1, \pm i\}$. □

Hai số nguyên Gauss α và β được gọi là **liên kết** với nhau nếu $\alpha|\beta$ và $\beta|\alpha$, kí hiệu $\alpha \sim \beta$. Rõ ràng α liên kết với β nếu và chỉ nếu chúng sai khác nhau một nhân tử khả nghịch.

Số nguyên Gauss α được gọi là nhân tử bất khả qui nếu $\alpha \neq 0$, α không khả nghịch và nếu $\alpha = \beta\gamma$ thì $\beta \sim \alpha$ hoặc $\gamma \sim \alpha$, tức α không có ước thực sự nào.

Các định nghĩa số học trên chỉ là một sự mở rộng các định nghĩa số học trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Ta biết rằng nhân tử bất khả quy trong vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ là các số có dạng $\pm p$ trong đó p là số nguyên tố. Tuy nhiên một số nguyên tố thì chưa chắc đã bất khả quy trên $\mathbb{Z}[i]$. Ví dụ $2 = i(1-i)(1-i)$. Trước khi nghiên cứu về phần tử bất khả qui trong vành các số nguyên Gauss, chúng tôi trình bày kết quả sau:

Proposition 3. (Phép chia Euclide) *Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i], \alpha \neq 0$. Khi đó tồn tại các số nguyên Gauss γ, ρ sao cho*

$$\beta = \alpha\gamma + \rho, N(\rho) < N(\alpha).$$

Chứng minh. Ta có $\dfrac{\beta}{\alpha} = a + bi, a, b \in \mathbb{Q}$. Chọn số nguyên Gauss $\gamma = a_1 + b_1 i$ sao cho $|a - a_1| \leq 0.5$ và $|b - b_1| \leq 0.5$ và đặt $\rho = \beta - \alpha\gamma$. Do $\mathbb{Z}[i]$ là một vành nên $\rho \in \mathbb{Z}[i]$. Ta có $\rho = \alpha((a-a_1)+(b-b_1)i)$ và $N((a-a_1)+(b-b_1)i) = (a-a_1)^2+(b-b_1)^2 \leq 0.5^2+0.5^2 < 1$ nên $N(\rho) = N(\alpha)N((a-a_1)+(b-b_1)i) < N(\alpha)$. □

Kết quả trên cho thấy sự tồn tại một phép chia Euclide trên vành các số nguyên Gauss, khi đó người ta gọi $\mathbb{Z}[i]$ là một vành Euclide. Cũng tương tự như thuật toán Euclide trên vành các số nguyên, luôn tồn tại ước chung lớn nhất trên vành $\mathbb{Z}[i]$ theo nghĩa: Cho hai số nguyên Gauss α và β, $\alpha \neq 0$. Phần tử $\rho \in \mathbb{Z}[i]$ được gọi là ước chung lớn nhất của α và β nếu

- $\rho|\alpha$ và $\rho|\beta$.
- Với mọi ρ' là ước của α và β thì $\rho'|\rho$.

Chú ý rằng ước chung lớn nhất của hai phần tử là không duy nhất. Nếu ρ là một ước chung lớn nhất của α và β thì mọi phần tử ρ'' liên kết với ρ cũng là một ước chung lớn nhất. Hai số nguyên Gauss khác không được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu ước chung lớn nhất của nó là 1. Từ thuật toán Euclide trong vành $\mathbb{Z}[i]$, chúng ta thấy rằng: Cho hai số nguyên Gauss tùy ý α và β, $\alpha \neq 0$ và ρ là một ước chung lớn nhất của α, β, luôn tồn tại $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ sao cho

$$u\alpha + v\beta = \rho$$

Trên vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ chúng ta có định lí cơ bản sau:

Định lý 4. (Định lí cơ bản trên $\mathbb{Z}$) *Cho số nguyên $n, |n| > 1$. Khi đó có sự phân tích duy nhất n dưới dạng*

$$n = \pm p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k},$$

trong đó p_i là các số nguyên tố phân biệt và r_i là các số nguyên dương.

Việc tồn tại thuật toán Euclide trên vành $\mathbb{Z}[i]$ chứng tỏ rằng định lý cơ bản số học còn đúng trên vành $\mathbb{Z}[i]$ tức

Định lý 5. (Định lí cơ bản trên $\mathbb{Z}[i]$) *Cho số nguyên Gauss khác không và không khả nghịch n. Khi đó có sự phân tích duy nhất n dưới dạng*

$$n = up_1^{r_1} \dots p_k^{r_k},$$

trong đó p_i là các số nguyên Gauss bất khả quy phân biệt, r_i là các số nguyên dương và u là một phần tử khả nghịch.

Sau đây chúng ta nghiên cứu một số tính chất của phần tử bất khả quy trong vành $\mathbb{Z}[i]$.

Proposition 6. *Cho các số nguyên Gauss α, β, γ và γ là phần tử bất khả qui trong $\mathbb{Z}[i]$.*

(i) *Nếu $\gamma|\alpha\beta$ thì $\gamma|\alpha$ hoặc $\gamma|\beta$.*

(ii) *Tồn tại duy nhất số nguyên tố p sao cho $\gamma|p$ trong $\mathbb{Z}[i]$.*

Chứng minh. Ta chứng minh (ii). Ta có $\gamma|\gamma\overline{\gamma} = N(\gamma)$. Từ $N(\gamma)$ là số nguyên dương lớn hơn 1 nên ta có thể phân tích $N(\gamma) = p_1 p_2 \dots p_k$, trong đó p_i là các số nguyên tố không nhất thiết phân biệt. Theo (i), tồn tại số nguyên tố $p = p_j$ sao cho $\gamma|p$.

Giả sử có số nguyên tố $q \neq p$ sao cho $\gamma|q$. Từ $(p, q) = 1$ nên tồn tại $u, v \in \mathbb{Z}$: $pu + qv = 1$. Từ $\gamma|pu + qv$, suy ra $\gamma|1$. Mâu thuẫn vì γ là phần tử bất khả qui. □

Kết quả trên cho chúng ta thấy rằng phần tử bất khả qui trên $\mathbb{Z}[i]$ đều là ước của một số nguyên tố nào đó. Để miêu tả rõ hơn phần tử bất khả qui trong $\mathbb{Z}[i]$, chúng ta sẽ nghiên cứu các nhân tử bất khả qui của các số nguyên tố thông thường.

Bổ đề 7. *Cho $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ và $N(\alpha)$ là một số nguyên tố. Khi đó α là phần tử bất khả qui.*

Chứng minh. Từ $N(\alpha) \geq 2$ nên α khác không và không là phần tử khả nghịch. Giả sử $\alpha = \gamma\gamma'$ trong đó $\gamma, \gamma' \in \mathbb{Z}[i]$ và $N(\gamma) > 1, N(\gamma') > 1$. Khi đó $N(\alpha) = N(\gamma\gamma') = N(\gamma)N(\gamma')$, mâu thuẫn với tính nguyên tố của $N(\alpha)$. Vậy α là bất khả qui. □

Chúng ta bắt đầu với số nguyên tố $p = 2$.

Proposition 8. *Các ước bất khả qui của 2 trong $\mathbb{Z}[i]$ là $u(1-i)$ trong đó u là phần tử khả nghịch tức $u \in \{\pm 1, \pm i\}$.*

Chứng minh. Ta có $2 = i(1-i)^2$. Từ $N(1-i) = 2$ là số nguyên tố nên $1-i$ là bất khả qui, vì vậy ta có điều phải chứng minh. □

Với các số nguyên tố p lẻ, chúng ta có $p \equiv 1 \pmod 4$ hoặc $p \equiv 3 \pmod 4$.

Proposition 9. *Nếu p là một số nguyên tố $p \equiv 3 \pmod 4$ thì p là bất khả qui trong $\mathbb{Z}[i]$.*

Chứng minh. Giả sử p không là phần tử bất khả qui, ta có $p = \gamma\gamma'$ trong đó $\gamma, \gamma' \in \mathbb{Z}[i]$ và $N(\gamma) > 1, N(\gamma') > 1$. Từ $p^2 = N(p) = N(\gamma)N(\gamma')$, ta suy ra $N(\gamma) = p$. Mặt khác nếu ta giả sử $\gamma = a + bi$ thì $a^2 + b^2 = p$. Suy ra $a^2 + b^2 \equiv 3 \pmod 4$, điều này là không thể xảy ra do một số chính phương khi chi cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1. □

Proposition 10. *Giả sử p là một số nguyên tố $p \equiv 1 (\bmod 4)$. Khi đó tồn tại duy nhất bộ số nguyên dương (a, b) chính xác tới thứ tự sao cho $p = a^2 + b^2$. Hơn nữa, các nhân tử bất khả quy của p là $a + bi$, $a - bi$ và các phần tử liên kết với chúng.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh p không phải là phần tử bất khả qui. Thật vậy, giả sử $p = 4k + 1$, theo định lí Wilson:

$$(4k)! \equiv -1 (\bmod p).$$

Mặt khác $(4k)! \equiv (1.2...2k)(2k+1)(2k+2)...(2k+2k) \equiv (1.2...2k)(-2k)(-2k+1)...(-1) \equiv (-1)^{2k}((2k)!)^2 \equiv ((2k)!)^2 (\bmod p)$. Đặt $n = 2k$, ta có $n^2 \equiv -1 (\bmod p)$, suy ra $p | n^2 + 1$. Lại có $n^2 + 1 = (n - i)(n + i)$, p không là ước của $n - i$ và $n + i$ vì $\frac{n}{p} \pm \frac{1}{p} i \notin \mathbb{Z}[i]$. Từ đó suy ra p không phải là phần tử bất khả qui. Giả sử $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ là một nhân tử bất khả quy của p, suy ra $N(a + bi) | N(p)$ hay $a^2 + b^2 | p^2$. Vì $1 < N(a + bi) < N(p)$ nên suy ra $a^2 + b^2 = p$. Ta có thể coi a, b là các số nguyên dương và $p = (a + bi)(a - bi)$. Giả sử có bộ số nguyên dương $(c, d) \neq (a, b)$ sao cho $p = (c^2 + d^2) = (c + di)(c - di)$ suy ra $c + di$ là một nhân tử bất khả qui khác của p và không liên kết với $a \pm bi$. Mâu thuẫn với tính phân tích duy nhất thành các nhân tử bất khả qui trong $\mathbb{Z}[i]$. □

2 Ứng dụng của $\mathbb{Z}[i]$ trong giải phương trình Diophante

Có rất nhiều bài toán giải phương trình Diophante dùng ứng dụng của vành các số nguyên Gauss. Sau đây chúng tôi chỉ trình bày một vài ứng dụng tiêu biểu.

Bài toán 1 (Giả thuyết Catalan). Cho hai số nguyên dương $m, n > 1$. Khi đó phương trình

$$x^n - y^m = 1$$

không có nghiệm nguyên với $x \neq 0, y \neq 0$ nếu $(n, m) \neq (2, 3)$. Trong trường hợp $(n, m) = (2, 3)$ thì phương trình chỉ có nghiệm nguyên $(\pm 3, 2)$.

Giả thiết được nhà toán học Catalan người Bỉ , giáo sư của Trường đại học bách khoa Paris danh tiếng nhất , gửi đăng trong tạp chí J. Reine Angew. Math. năm 1844 [1]. Giả thuyết này dành được nhiều sự quan tâm cũng như thách thức nhiều nhà toán học trên thế giới. Năm 2002, nhà toán học người Romania Mihăilescu, đã giải quyết trọn vẹn giả thuyết này trong công trình công bố cũng trên tạp chí J. Reine Angew. Math [2] với việc sử dụng các công cụ của toán học hiện đại như lý thuyết trường, lý thuyết nhóm, đặc biệt là lý thuyết nhóm Galois.

Sau đây chúng ta xét các trường hợp đặc biệt của phương trình này.

Bài toán 1.1 . Phương trình $x^3 - y^2 = 1$ chỉ có nghiệm nguyên duy nhất $(x, y) = (1, 0)$.

Chứng minh. Dễ nhận thấy x lẻ và y chẵn. Ta phân tích

$$x^3 = (y - i)(y + i) \tag{1}$$

Từ y chẵn nên $y-i$ và $y+i$ là hai số nguyên tố cùng nhau trong $\mathbb{Z}[i]$. Thật vậy, giả sử α là một ước chung của $y-i$ và $y+i$. Ta có $\alpha|(y+i)-(y-i)=2i$. Do đó $N(\alpha)|N(2i)=4$. Lại có $N(\alpha)|N(y+i)=y^2+1$, là một số lẻ. Suy ra số nguyên dương $N(\alpha)=1$ tức α là phần tử khả nghịch. Kết hợp với (1), ta suy ra $y+i$ và $y-i$ đều là lập phương của một phần tử nào đó trong $\mathbb{Z}[i]$. Giả sử $y+i=(a+bi)^3$, khi đó bằng cách lấy liên hợp ta có $(y-i)=(a-bi)^3$. So sánh phần ảo, ta suy ra $1=b(3a^2-b^2), a, b$ là các số nguyên. Giải phương trình nghiệm nguyên này ta có $(a,b)=(0,-1)$, suy ra $(x,y)=(1,0)$. □

Cùng cách giải tương tự, chúng ta có thể giải phương trình nghiệm nguyên sau:

Bài toán 1.2

(a) $x^5-y^2=1$.

(b) $x^3-y^2=5$.

(c) $x^3-y^2=6$.

Bây giờ chúng ta xem xét giải phương trình nghiệm nguyên có dạng sau:

Bài toán 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình dạng

$$x^{2n+1}-y^2=4.$$

Trước hết ta xét các trường hợp riêng của bài toán.

Bài toán 2.1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3-y^2=4$$

Chứng minh. Từ phương trình bài toán, ta thấy x, y cùng tính chẵn, lẻ. Ta có

$$x^3=(y-2i)(y+2i) \tag{2}$$

Nếu y là số lẻ. Bằng cách chứng minh tương tự bài trên ta suy ra $y-2i, y+2i$ nguyên tố cùng nhau. Từ đó suy ra $y+2i=(a+bi)^3$ và $y-2i=(a-bi)^3$. Thay vào phương trình (2), so sánh phần ảo, ta có $2=b(3a^2-b^2)$. Giải phương trình nghiệm nguyên này, ta có $(a,b)=(\pm1,1)$. Suy ra $(x,y)=(5,\pm11)$.

Nếu y là số chẵn thì $y-2i$ và $y+2i$ không nguyên tố cùng nhau.Ta đặt $y=2y_1, x=2x_1$, khi đó ta có phương trình

$$y_1^2=2x_1^3-1. \tag{3}$$

Suy ra y_1 là số lẻ và

$$2x_1^3=(y_1-i)(y_1+i).$$

Từ $y_1^2\equiv 1(\bmod 8)$ nên $x_1^3\equiv 1(\mod 4)$. Suy ra x_1 là số lẻ. Ta có thể viết phương trình (3) dưới dạng

$$(ix_1)^3=\frac{y_1-i}{1+i}\frac{y_1+i}{1+i}.$$

Dễ chứng minh được rằng $\frac{y_1-i}{1+i}$ và $\frac{y_1+i}{1+i}$ là hai số nguyên Gauss nguyên tố cùng nhau, do đó $\frac{y_1-i}{1+i}$ và $\frac{y_1+i}{1+i}$ cũng là lập phương của hai số nguyên Gauss nào đó. Ta có

$$y+2i=2(y_1+i)=-i(1+i)^2=(-1+i)^3\frac{y_1+i}{1+i}$$

nên $y+2i$ là lập phương của một số nguyên Gauss. Kết hợp với lập luận giống phần trước, ta có $(x;y)=(2,\pm 2.)$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(2,\pm 2)$ và $(5,\pm 11)$. □

Bài toán 2.2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^5 - y^2 = 4 \tag{4}$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh rằng phương trình (4) không có nghiệm nguyên. Giả sử (x,y) là một nghiệm nguyên của phương trình, dễ thấy x, y cùng tính chẵn lẻ.

Nếu x chẵn, ta đặt $x=2x_1$ và $y=2y_1$. Thay vào phương trình (4) ta được $y_1^2 = 8x_1^5 - 1$ hay $y_1^2+1 = 8x_1^2$. Từ vế phải là số chẵn nên y_1 là số lẻ. Suy ra $y_1^2+1 \equiv 2 (\bmod 4)$, trong khi đó vế phải chia hết cho 4 (Mâu thuẫn). Vậy x và y phải là số lẻ. Ta có

$$x^5 = y^2 + 4 = (y+2i)(y-2i).$$

Theo chứng minh bài toán 3.1, ta suy ra $y+2i$ và $y-2i$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Điều này suy ra rằng $y+2i$ phải có dạng $(a+bi)^5$ trong đó $a+bi$ là số nguyên Gauss. Lấy liên hợp ta suy ra $y-2i=(a-bi)^5$. So sánh phần ảo của $y+2i=(a+bi)^5$, ta có

$$a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4 = a(a^4 - 10a^2b^2 + 5b^4) = 2. \tag{5}$$

Vì vậy $a|2$, tức $a=\pm 1, \pm 2$. Thay các giá trị của a vào phương trình trên, dễ thấy rằng không tồn tại số nguyên b để phương trình (5) có nghiệm. □

Từ chứng minh của bài toán 2.1 và bài toán 2.2, chúng ta có kết quả sau:

Định lý 11. *Với $n \geq 2$, phương trình $x^{2n+1} - y^2 = 4$ có nghiệm nguyên (x,y) nếu phương trình*

$$y + 2i = (a+2i)^{2n+1}$$

có nghiệm nguyên (y,a).

Bài toán 3. Đếm các số điểm nguyên trên đường tròn tâm $O(0,0)$ có bán kính $\sqrt{n}$ với n là một số nguyên dương.

Bài toán này thực chất là bài toán đếm số nghiệm nguyên của phương trình Diophante

$$x^2 + y^2 = n. \tag{6}$$

Trong trường hợp $n=p$ là số nguyên tố. Theo kết quả của chứng minh trong phần 1, chúng ta suy ra:

Nếu $p=2$ hoặc $p \equiv 1 (\bmod 4)$ thì tồn tại duy nhất bộ số nguyên dương (a,b) chính xác tới thứ tự sao cho $p=a^2+b^2$. Do đó số nghiệm nguyên của phương trình (6) là 4.

Nếu $p \equiv 3 (\bmod 4)$ thì phương trình (6) không có nghiệm nguyên.

Trong trường hợp n tùy ý, ta có kết quả sau:

Định lý 12. *Giả sử A là số các ước có dạng $4k+1$ của n và B là số các ước có dạng $4k+3$ của n. Khi đó số nghiệm nguyên của phương trình (6) là $4(A-B)$.*

Chứng minh. Theo định lý cơ bản trong vành $\mathbb{Z}[i]$, ta có

$$\begin{aligned} n &= 2^m p_1^{k_1}...p_m^{k_m}\alpha_1^{l_1}\overline{\alpha}_1^{l_1}...\alpha_s^{l_s}\overline{\alpha}_s^{l_s} \\ &= (1-i)^m(1+i)^m p_1^{k_1}...p_m^{k_m}\alpha_1^{l_1}\overline{\alpha}_1^{l_1}...\alpha_s^{l_s}\overline{\alpha}_s^{l_s} \\ &= (-i)^m(1+i)^{2m} p_1^{k_1}...p_m^{k_m}\alpha_1^{l_1}\overline{\alpha}_1^{l_1}...\alpha_s^{l_s}\overline{\alpha}_s^{l_s} \end{aligned}$$

trong đó p_i là các phần tử bất khả qui trong $\mathbb{Z}[i]$ thỏa mãn $p_i = \overline{p_i}$. Khi đó p_i là một số nguyên tố và $p_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. α_j là các số có dạng $a + bi$ với $a^2 + b^2$ là các số nguyên tố có dạng $4k + 1$.

Từ $n = (x + yi)(x - yi)$ và tính duy nhất của sự phân tích thành nhân tử bất khả qui, ta có

$$x + yi = u(1+i)^m p_1^{k_1/2}...p_m^{k_m/2}\alpha_1^{t_1}\overline{\alpha}_1^{l_1-t_1}...\alpha_s^{t_s}\overline{\alpha}_s^{l_s-t_s},$$

trong đó u là phần tử khả nghịch ($u = \pm 1, \pm i$) và $0 \le t_j \le l_j$. Do đó, số nghiệm nguyên của phương trình (6) sẽ bằng

- 0 nếu có ít nhất một số k_i là số lẻ.
- $4(l_1 + 1)(l_2 + 1)...(l_s + 1)$ nếu tất cả k_i chẵn.

Mặt khác, nếu d là một ước lẻ của n thì

$$d = p_1^{v_1}...p_m^{v_m}\alpha_1^{\mu_1}\overline{\alpha}_1^{\mu_1}...\alpha_s^{l_s}\overline{\alpha}_s^{\mu_s},$$

trong đó $0 \le v_i \le k_i$ và $0 \le \mu_j \le l_j$. Vì $p_i \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$ và $\alpha_j\overline{\alpha}_j \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$ nên $d \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$ nếu và chỉ nếu $v_1 + v_2 + ... + v_m \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2.)$ Điều này chứng tỏ rằng $A - B$ bằng

- 0 nếu có ít nhất một số k_i là số lẻ.
- $(l_1 + 1)(l_2 + 1)...(l_s + 1)$ nếu tất cả k_i chẵn.

□

Bài toán 4. Nghiệm nguyên của phương trình Pitago $x^2 + y^2 = z^2$ với $\gcd(x, y) = 1$ có dạng $x = s^2 - t^2, y = 2st, z = \pm(s^2 + t^2)$, trong đó s, t là hai số nguyên tố cùng nhau và không cùng tính chẵn lẻ.

Chứng minh. Chứng minh bài toán này cũng tương tự như chứng minh của các bài toán trên. □

Bằng nghiên cứu tương tự trên lớp vành $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ và $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ chúng ta có thể giải được các phương trình Diophante dạng $x^2 \pm 2y^2 = z^2$. Tuy nhiên việc giải các phương trình $x^2 \pm py^2 = z^2$, với p là một số nguyên tố lớn hơn 2 là một bài toán khó, dùng nhiều đến kiến thức của Hình học đại số vì vậy mà chúng tôi không nêu ra ở đây.

Còn rất nhiều các ứng dụng khác của vành Euclide trong việc giải các bài toán phương trình Diophante. Do khuôn khổ có hạn, chúng tôi chỉ trình bày một số bài toán áp dụng. Chúng tôi hi vọng qua bài viết này, các bạn sẽ có thêm một công cụ để giải quyết các bài toán về phương trình Diophante cũng như có công cụ để chúng ta xây dựng các bài toán mới.

References

[1] E. Catalan, Note extraite d'une lettre adressée à l'éditeur, J. Reine Angew. Math. 27 (1844), 192.

[2] P. Mihăilescu, Primary Cyclotomic Units and a Proof of Catalan's Conjecture, J. Reine Angew. Math. 572 (572): 167–195, 2004.

[3] Phan Doãn Thoại, Số học trong miền nguyên, NXB ĐHSP 2002.

Phương trình sai phân - một công cụ hay một phương pháp tính tổng

Nguyễn Thị Thu Thủy, Trường THPT Tiên Du I, Bắc Ninh

Nguyễn Thị Trang, Đại học Tài nguyên và Môi trường, Hà Nội

1 Đặt vấn đề

Những bài toán tính tổng (tổng, tổng bình phương các số tự nhiên đầu tiên, ...) có mặt ngay trong chương trình chuyên toán trung học cơ sở. Đặc biệt, ở lớp 11, các bài toán tính tổng và ứng dụng để tìm giới hạn của dãy số được gặp thường xuyên. Các bài toán dạng này thường được cho dưới dạng biết trước tổng và yêu cầu học sinh chứng minh bằng qui nạp. Nếu chưa biết trước tổng thì việc tìm ra tổng của một dãy số (thí dụ, lập phương các số tự nhiên đầu tiên, ...) là bài toán khó đối với học sinh trung học cơ sở.

Bài viết này trình bày ứng dụng các kiến thức cơ bản và đơn giản nhất của phương trình sai phân để tính tổng. Cũng có thể coi đây là một phương pháp tính tổng của dãy số. Với mục đích giúp học sinh phổ thông trung học, thậm chí học sinh lớp 9, có thể hiểu một số kiến thức sơ đẳng của phương trình sai phân và áp dụng được vào tính tổng và các dạng toán khác, dưới đây chúng tôi trình bày Phương trình sai phân dưới dạng đơn giản nhất.

2 Phương trình sai phân bậc nhất tuyến tính thuần nhất

Phương trình sai phân bậc nhất tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng là phương trình dạng

$$x_{n+1} = qx_n, n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

trong đó q là hằng số.

Phương trình sai phân (1) thường được gọi là cấp số nhân (dãy số mà số hạng sau bằng số hạng trước nhân với một số không đổi).

Dãy số $\tilde{x}_n, n = 0, 1, 2, \dots$ được gọi là *nghiệm* của phương trình sai phân (1) nếu ta thay $\tilde{x}_n$ vào phương trình (1) thì nó đúng với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$, tức là $\tilde{x}_{n+1} = q\tilde{x}_n$ với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$

Mọi nghiệm của phương trình (1) có dạng

$$x_n = Cq^n, n = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

với C là một hằng số bất kì. Thật vậy, thay $x_{n+1} = Cq^{n+1}$ vào (1) ta được

$$x_{n+1} = Cq^{n+1} = (Cq^n)q = qx_n \text{ đúng với mọi } n = 0, 1, 2, \dots$$

Nếu biết x_0 thì thay vào (2) ta được $C = x_0$. Do đó nghiệm của (1) có dạng

$$x_n = q^n x_0, n = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

Đây chính là công thức tính số hạng tổng quát của một cấp số nhân.
Như vậy, nghiệm của phương trình sai phân bậc nhất được xác định duy nhất bởi một điều kiện ban đầu (số hạng đầu) x_0.

3 Phương trình sai phân bậc nhất tuyến tính không thuần nhất

Phương trình sai phân bậc nhất tuyến tính không thuần nhất là phương trình dạng

$$x_{n+1} = qx_n + d_n, n = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

trong đó q là hằng số, d_n là một hàm bất kì của biến số tự nhiên n.
Dễ dàng chứng minh theo qui nạp, nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất (4) được tính theo công thức (với C là hằng số bất kì)

$$x_n = Cq^n + q^{n-1}d_0 + q^{n-2}d_1 + \cdots qd_{n-2} + d_{n-1} = Cq^n + \sum_{i=0}^{n-1} q^{n-i-1}d_i. \tag{5}$$

Tuy nhiên, nếu d_n là một hàm bất kì của n thì công thức (5) không đẹp về mặt toán học (không rút gọn được) và không tiện sử dụng, vì vậy ta đi tìm công thức nghiệm trong một số trường hợp đặc biệt, nhưng cũng đủ tổng quát để áp dụng vào không chỉ bài toán tính tổng. Trước tiên ta có

Mệnh đề 1. *Nghiệm tổng quát của phương trình (4) có dạng*

$$x_n = \tilde{x}_n + \bar{x}_n, \tag{6}$$

với $\tilde{x}_n = Cq^n$ là nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (1) và $\bar{x}_n$ là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (4).

Chứng minh. Giả sử $\tilde{x}_n = Cq^n$ là nghiệm tổng quát của (1) và $\bar{x}_n$ là nghiệm riêng của (4), tức là $\bar{x}_{n+1} = q\bar{x}_n + d_n$ với mọi n. Khi ấy

$$x_{n+1} = qx_n + d_n = q(Cq^n + \bar{x}_n) + d_n = Cq^{n+1} + q\bar{x}_n + d_n = \tilde{x}_n + \bar{x}_n.$$

Vậy $x_n = \tilde{x}_n + \bar{x}_n = Cq^n + \bar{x}_n$ là nghiệm tổng quát của (4). □

Nghiệm của (4) ứng với giá trị ban đầu x_0 có dạng $x_n = q^n x_0 + \bar{x}_n$.
Như vậy, để tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất, ta phải tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.
Dưới đây ta sẽ tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân trong một số trường hợp đặc biệt, tuy nhiên, vẫn đủ tổng quát.

Một số trường hợp đặc biệt

Mệnh đề 2. *Giả sử d_n là một đa thức bậc k của n.*
Nếu $q \neq 1$ thì một nghiệm riêng $\bar{x}_n$ của phương trình không thuần nhất (4) có thể tìm dưới dạng đa thức bậc k của n: $\bar{x}_n = Q_k(n)$.
Nếu $q = 1$ thì có thể tìm một nghiệm riêng $\bar{x}_n$ của phương trình (4) dưới dạng đa thức bậc $k+1$ của n: $\bar{x}_n = nQ_k(n)$.

Chứng minh. Giả sử $d_n = P_k(n) = a_0 n^k + \cdots + a_k, a_0 \neq 0$ là một đa thức bậc k của n.

Trường hợp 1: $q \neq 1$. Tìm nghiệm dưới dạng $\bar{x}_n = Q_k(n)$, trong đó $Q_k(n) = b_0 n^k + \cdots + b_k$ là một đa thức bậc k, là nghiệm của (4).
Với mọi n ta có $Q_k(n+1) = \bar{x}_{n+1} = q\bar{x}_n + d_n = qQ_k(n) + P_k(n)$ hay

$$b_0(n+1)^k + \cdots + b_k = q(b_0 n^k + \cdots + b_k) + (a_0 n^k + \cdots + a_k). \tag{7}$$

So sánh các hệ số cùng bậc của n theo k ta lần lượt tìm được các hệ số của đa thức $\bar{x}_n = Q_k(n)$. Thí dụ, $b_0 = \dfrac{a_0}{1-q}$.
Khi $q = 1$, nếu chọn $\bar{x}_n = Q_k(n)$ là đa thức bậc k thì so sánh các hệ số cùng bậc của n^k, từ phương trình (7) ta suy ra $a_0 = 0$, vô lí. Do đó ta phải tìm $\bar{x}_n$ dưới dạng $\bar{x}_n = nQ_k(n)$, là một đa thức bận $k+1$ của n.
Để $\bar{x}_n = nQ_k(n)$ là nghiệm của (4) thì với mọi n ta phải có

$$(n+1)Q_k(n+1) = \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n + d_n = nQ_k(n) + P_k(n).$$

So sánh các hệ số bậc tương ứng của đồng nhất thức trên, ta tìm được các hệ số của $Q_k(n)$, tức là tìm được nghiệm riêng $\bar{x}_n = nQ_k(n)$. □

Thí dụ 1. Tìm các số hạng tổng quát của dãy số

$$x_0 = 1; 3x_{n+1} - 2x_n = n+1; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Giải. Phương trình trên đưa về dạng $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{n+1}{3}$.
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $x_n = C(\frac{2}{3})^n$.

Vì $q = \dfrac{2}{3} \neq 1$ và $d_n = \dfrac{n+1}{3}$ là một đa thức bậc của n nên ta tìm nghiệm riêng của phương trình dưới dạng $\bar{x}_n = c_1 n + c_2$.
Thay vào phương trình ta có đồng nhất thức đúng với mọi n :

$$3[c_1(n+1)+c_2] - 2[c_1 n + c_2] = n+1$$

So sánh hệ số hai vế suy ra $c_1 = 1; c_2 = -2$.
Vậy phương trình đã cho có một nghiệm riêng $\bar{x} = n-2$.
Nghiệm của phương trình đã cho là $x_n = C(\frac{2}{3})^n + n - 2$. Vì $x_0 = 1$ nên $C - 2 = 1$ hay $C = 3$. Vậy $x_n = 3(\frac{2}{3})^n + n - 2$.

Trường hợp đặc biệt $d_n \equiv d$
Nếu $d_n \equiv d$ thì phương trình (4) có dạng

$$x_{n+1} = qx_n + d. \tag{8}$$

Nếu $q \neq 1$ và $d_n = d$ là đa thức bậc 0 nên phương trình có một nghiệm riêng là $\bar{x}_n = c$. Thay vào phương trình $x_{n+1} = qx_n + d$ ta được $c = qc + d$, suy ra $c = \dfrac{d}{1-q}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình $x_{n+1} = qx_n + d$ có dạng

$$x_n = Cq^n + \frac{d}{1-q}. \tag{8'}$$

Nếu biết x_0 thì suy ra $C = x_0 - \dfrac{d}{1-q}$. Nghiệm của phương trình (8) ứng với điều kiện ban đầu x_0 là $x_n = q^n x_0 + \dfrac{d(1-q^n)}{1-q}$.
Tính trực tiếp, từ công thức (8), khi $q \neq 1$, ta cũng có (8'):

$$\begin{aligned} x_n &= qx_{n_1} + d = q(x_{n-2}+d) + d = \dots \\ &= q^n x_0 + (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1)d = q^n x_0 + \frac{q^n - 1}{q-1}d. \end{aligned}$$

Khi $q = 1$ thì (8) trở thành $x_{n+1} = x_n + d$ (cấp số cộng). Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $x_{n+1} = x_n$ là $x_n \equiv C$. Nghiệm riêng được tìm dưới dạng $x_n = cn$ (đa thức bậc nhất của n, cao hơn đa thức $d_n \equiv d$ một bậc). Thay vào phương trình $x_{n+1} = x_n + d$ ta được $c(n+1) = cn + d$. Suy ra $c = d$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình $x_{n+1} = x_n + d$ là $x_n = C + nd$.
Nếu x_0 cho trước thì $x_n = x_0 + nd$. Đây chính là công thức tổng quát của cấp số cộng. Công thức này cũng dễ dàng chứng minh trực tiếp như sau:

$$x_n = x_{n-1} + d = (x_{n-2} + d) + d = \dots = x_0 + nd.$$

Nhận xét 1 Mệnh đề 2 có thể áp dụng để tính dễ dàng rất nhiều tổng. Dưới đây là các ví dụ và bài tập. Các ví dụ và bài tập này đều có dạng $x_{n+1} = x_n + d_n$, cùng có phương trình thuần nhất dạng $x_{n+1} = x_n$ với nghiệm tổng quát là $x_n = C$, trong đó C là hằng số bất kì. Nếu chọn $x_0 = 0$ thì nghiệm của phương trình $x_{n+1} = x_n$ là $x_n = 0$. Do đó nghiệm của phương trình không thuần nhất $x_{n+1} = x_n + d_n$ với điều kiện ban đầu $x_0 = 0$ chính là tổng $x_n = \sum_{i=0}^{n-1} d_i$. Như vậy, việc tìm nghiệm x_n của phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + d_n$ cũng chính là tính tổng $\sum_{i=0}^{n} d_i$.

Bài 1 Tính tổng của n số tự nhiên đầu tiên $S_n = 1 + 2 + \cdots n$.

Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + n, n = 0, 1, 2, \ldots$ với $x_0 = 0$. Tìm nghiệm riêng dưới dạng $\bar{x}_n = n(c_0 n + c_1)$.
Thay vào phương trình ta được đồng nhất thức (đúng với mọi n):

$$(n+1)(c + 0(n+1) + c_1) = n(c_0 n + c_1) + n.$$

So sánh hệ số của hai vế ta được $c_0 = \frac{1}{2}, c_1 = -\frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho ứng với $x_0 = 0$ là $x_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ và ta có

$$x_{n+1} = x_n + n = (x_{n-1} + (n-1)) + n = \ldots = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Như vậy, x_{n+1} chính là tổng S_n của n số tự nhiên đầu tiên và

$$x_{n+1} = x_n + n = (x_{n-1} + (n-1)) + n = \ldots = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ta thường tính $S_n = 1 + 2 + \cdots n$ như sau.

Cách 2 Viết lại tổng trên dưới dạng $S_n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$.

Cộng hai đẳng thức trên ta được

$$2S = (1 + 2 + \cdots + n) + (n + (n-1) + \cdots + 1) = \underbrace{(n+1) + \cdots + (n+1)}_{n} = n(n+1).$$

Vậy $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Bài 2 Tính tổng của n số lẻ đầu tiên $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots = (2n - 1)$.

Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + (2n+1), n = 0, 1, 2, \ldots$ với $x_0 = 0$.
Ta tìm nghiệm riêng của phương trình trên dưới dạng $\bar{x}_n = n(c_0 n + c_1)$.
Thay vào phương trình ta được đồng nhất thức đúng với mọi n:

$$(n+1)(c_0(n+1) + c_1) = n(c_0 n + c_1) + 2n + 1.$$

So sánh hệ số của hai vế ta được $c_0 = 1, c_1 = 0$.
Nghiệm của phương trình ứng với $x_0 = 0$ là $x_n = n^2$ và

$$x_n = x_{n-1} + 2n - 1 = 1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Như vậy, $x_n = n^2 = S_n$ chính là tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên.
Tổng $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots = (2n-1)$ cũng có thể tính như sau.

Cách 2 Viết lại tổng trên dưới dạng

$$S_n = (2n-1) + (2n-3) + \cdots + 3 + 1.$$

Cộng hai đẳng thức trên ta được

$$2S_n = (1+3+\cdots+(2n-1)) + ((2n-1)+\cdots+3+1) = \underbrace{2n+\cdots+2n}_{n} = 2n^2.$$

Vậy $S_n = n^2$.

Bài 3 Tính tổng bình phương của n số tự nhiên đầu tiên.

Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + (n+1)^2, n = 0,1,2,\ldots$ với $x_0 = 0$.
Tìm nghiệm riêng dưới dạng $\bar{x}_n = n(an^2+bn+c)$. Thay vào phương trình ta được đồng nhất thức đúng với mọi n:

$$(n+1)(a(n+1)^2 + b(n+1) + c) = n(an^2+bn+c) + (n+1)^2.$$

So sánh các hệ số của đồng nhất thức trên ta được $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm ứng với $x_0 = 0$ là $x_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ và $x_n = x_{n-1} + n^2 = x_{n-2} + (n-1)^2 + (n)^2 = \ldots = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.
Như vậy, x_n chính là tổng các bình phương của n số tự nhiên đầu tiên và

$$x_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Suy ra công thức $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Bài 4 Tính tổng bình phương của n số lẻ đầu tiên.

Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + (2n+1)^2, n = 0,1,2,\ldots$ với $x_0 = 0$.
Tìm nghiệm riêng dưới dạng $\bar{x}_n = n(an^2+bn+c)$. Thay vào phương trình ta được đồng nhất thức đúng với mọi n:

$$(n+1)(a(n+1)^2 + b(n+1) + c) = n(an^2+bn+c) + (2n+1)^2.$$

Suy ra $a = \frac{4}{3}, b = 0, c = -\frac{1}{3}$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm ứng với $x_0 = 0$ là $x_n = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$ và

$$x_n = x_{n-1} + (2n-1)^2 = x_{n-2} + (2n-3)^2 + (2n-1) = \ldots = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2.$$

Như vậy , x_n chính là tổng bình phương của n số lẻ đầu tiên và

$$x_n = \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}n(4n^2-1) = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1).$$

Suy ra công thức $S_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = x_n = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$.

Bài 5 Tính tổng $S_n = 1^2 + 4^2 + \cdots + (3n-2)^2$.

Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + (3n+1)^2, n = 0, 1, 2, \ldots$ với $x_0 = 0$. Tìm nghiệm riêng dưới dạng $\bar{x}_n = n(c_0n^2 + c_1n + c_2)$. Thay vào phương trình ta được đồng nhất thức đúng với mọi n:

$$(n+1)(c_0(n+1)^2 + c_1(n+1) + c_2) = n(c_0n^2 + c_1n + c_2) + (3n+1)^2.$$

So sánh hệ số của hai vế ta được $c_0 = 3, c_1 = -\dfrac{3}{2}, c_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm ứng với $x_0 = 0$ là $x_n = \dfrac{n}{2}(6n^2 - 3n - 1)$ và

$$x_n = x_{n-1} + (3n-2)^2 = 1^2 + 4^2 + \cdots + (3n-2)^2 = \frac{n}{2}(6n^2 - 3n - 1).$$

Bài 6 Tính tổng $S_n = 2^2 + 5^2 + 8^2 + \cdots + (3n-1)^2$.

Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + (3n+2)^2, n = 0, 1, 2, \ldots$ với $x_0 = 0$.
Tìm nghiệm riêng dưới dạng $\bar{x}_n = n(c_0n^2 + c_1n + c_2)$.
Tương tự Bài 5 ta có

$$x_n = 2^2 + 5^2 + 8^2 + \cdots + (3n-1)^2 = \frac{n}{2}(6n^2 + 3n - 1).$$

Ta có thể chứng minh công thức trên bằng qui nạp như sau.

Cách 2 (Qui nạp) Giả sử $S_n = 2^2 + 5^2 + \cdots + (3n-1)^2 = \dfrac{n}{2}(6n^2 + 3n - 1)$. Khi ấy

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 2^2 + 5^2 + \cdots + (3n-1)^2 + (3n+2)^2 = \frac{n}{2}(6n^2 + 3n - 1) + (3n+2)^2 \\
&= \frac{6n^3 + 21n^2 + 23n + 8}{2} = \frac{(n+1)}{2}(6n2 + 15n + 8) \\
&= \frac{(n+1)}{2}(6(n+1)^2 + 3(n+1) - 1).
\end{aligned}$$

Cách 3 Biết $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Tính các tổng $S_n^{(1)} = 2^2 + 5^2 + 8^2 + \cdots + (3n-1)^2$ và $S_n^{(2)} = 1^2 + 4^2 + \cdots + (3n-2)^2$ như sau. Ta có

$$\begin{aligned}
S_{3n} &= 1^2 + 2^2 + \cdots (3n)^2 = (1^2 + 4^2 + \cdots + (3n-2)^2) + (2^2 + 5^2 + 8^2 \\
&\quad + \cdots + (3n-1)^2) + (3^2 + 6^2 + \cdots + (3n)^2) = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + 9S_n
\end{aligned}$$

Nghĩa là

$$S_n^{(1)} + S_n^{(2)} = S_{3n} - 9S_n = \frac{3n(3n+1)(6n+1)}{6} - 9\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(6n^2-1)}{2}.$$

Mặt khác ta lại có

$$S_n^{(1)} - S_n^{(2)} = 3 + 9 + 15 + \cdots + (6n-3) = 3(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)) = 3n^2.$$

Suy ra $S_n^{(1)} = \dfrac{n(6n^2+3n-1)}{2}$ và $S_n^{(2)} = \dfrac{n(6n^2-3n-1)}{2}$

Bài 7 Tính tổng $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + (n+1)^3, n = 0, 1, 2, \ldots$ với $x_0 = 0$.
Tìm nghiệm riêng dưới dạng $\bar{x}_n = n(c_0n^3 + c_1n^2 + c_2n + c_3)$. Thay vào phương trình ta được đồng nhất thức đúng với mọi n:

$$(n+1)(c_0(n+1)^3 + c_1(n+1)^2 + c_2(n+1) + c_3) = n(c_0n^3 + c_1n^2 + c_2n + c_3) + (n+1)^3.$$

So sánh hệ số của hai vế ta được $c_0 = \dfrac{1}{4}, c_1 = \dfrac{1}{2}, c_2 = \dfrac{1}{4}, c_3 = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm ứng với $x_0 = 0$ là $x_n = \dfrac{(n(n+1))^2}{4}$ và

$$x_n = x_{n-1} + n^3 = (x_{n-2} + (n-1)^3) + n^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Như vậy, $x_n = \dfrac{(n(n+1))^2}{4}$ chính là tổng lập phương của n số tự nhiên đầu tiên.
Ta cũng có thể tính $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$. như sau.
Từ khai triển $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ ta có:

$$\begin{aligned}
&2^4 - 1^4 = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1;\\
&3^4 - 2^4 = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1;\\
&4^4 - 3^4 = 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1;\\
&\ldots\ldots\\
&(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.
\end{aligned}$$

Cộng hai vế ta được:

$$(n+1)^4 - 1 = 4(1^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + \cdots + n^2) + 4(1 + \cdots + n) + (1 + \cdots + 1)$$

hay

$$4(1^3 + \cdots n^3) = (n+1)^4 - 1 - 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} - n.$$

Suy ra

$$1^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}(n+1)((n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n) = \frac{(n(n+1))^2}{4}.$$

Cũng có thể chứng minh công thức trên bằng qui nạp như sau.

$$1^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4) = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.$$

Bài 8 Tính tổng lập phương của các số tự nhiên lẻ

$$S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3.$$

Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + (2n+1)^3, n = 0, 1, 2, \ldots$ với $x_0 = 0$.
Tìm nghiệm riêng dưới dạng $\bar{x}_n = n(c_0n^3 + c_1n^2 + c_2n + c_3)$. Thay vào phương trình ta được đồng nhất thức đúng với mọi n:

$$(n+1)(c_0(n+1)^3 + c_1(n+1)^2 + c_2(n+1) + c_3) = n(c_0n^3 + c_1n^2 + c_2n + c_3) + (2n+1)^3.$$

So sánh hệ số của hai vế ta được $c_0 = 2, c_1 = 0, c_2 = -1, c_3 = 0$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm ứng với $x_0 = 0$ là $x_n = n^2(2n^2 - 1)$ và $x_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$ chính là tổng lập phương của n số tự nhiên lẻ đầu tiên. Cũng có thể chứng minh công thức trên bằng qui nạp hoặc sử dụng công thức của Bài 7.

Bài 9 Tính tổng $S_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1)$.

Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + n(n+1), x_1 = 0, n = 1, 2, \ldots$
Tìm nghiệm riêng dưới dạng $\bar{x}_n = n(c_0n^2 + c_1n + c_2)$. Thay vào phương trình trên ta được đẳng thức đúng với mọi n:

$$(n+1)(c_0(n+1)^2 + c_1(n+1) + c_2) = n(c_0n^2 + c_1n + c_2) + n(n+1).$$

So sánh hệ số hai vế theo bậc của n ta được:
$n^3 : c_0 = c_0$;
$n^2 : 3c_0 + c_1 = c_1 + 1$. Suy ra $c_0 = \dfrac{1}{3}$;
$n : 3c_0 + 2c_1 + c_2 = c_2 + 1$. Suy ra $c_1 = 0$;
$n^0 : c_0 + c_1 + c_2 = 0$. Suy ra $c_2 = -\dfrac{1}{3}$.
Vậy $\bar{x}_n = n(\dfrac{1}{3}n^2 - \dfrac{1}{3}) = \dfrac{n}{3}(n^2 - 1) = \dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}$. Nghiệm của phương trình đã cho là $x_n = \bar{x}_n = \dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}$ và

$$\frac{n(n+1)(n-1)}{3} = x_{n+1} = x_n + n(n+1) = x_{n-1} + (n+1)n + n(n+1) = \ldots$$
$$= 1.2 + 2.3 + \ldots + (n-1)n + n(n+1) = S_n.$$

Bài 10 Tính tổng $S_n = 1.2.3 + 2.3.4 + 4.5.6 + \cdots + n(n+1)(n+2)$.
Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + n(n+1)(n+2), x_1 = 0, n = 1, 2, \ldots$
Tìm nghiệm riêng dưới dạng $\bar{x}_n = n(c_0n^3 + c_1n^2 + c_2n + c_3)$. Thay vào phương trình ta được đồng nhất thức đúng với mọi n:

$$(n+1)(c_0(n+1)^3 + c_1(n+1)^2 + c_2(n+1) + c_3) = n(c_0n^3 + c_1n^2 + c_2n + c_3) + n(n+1)(n+2).$$

So sánh hệ số hai vế theo bậc của n ta được:
$n^4 : c_0 = c_0$;
$n^3 : 4c_0 + c_1 = c_1 + 1$. Suy ra $c_0 = \dfrac{1}{4}$;
$n^2 : 6c_0 + 3c_1 + c_2 = c_2 + 3$. Suy ra $c_1 = \dfrac{1}{2}$;
$n : 4c_0 + 3c_1 + c2_2 + c_3 = c_3 + 2$. Suy ra $c_2 = -\dfrac{1}{4}$;

$n^0 : c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$. Suy ra $c_3 = -\frac{1}{2}$.

Vậy

$$x_n = n(\frac{1}{4}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{4}n - \frac{1}{2}) = \frac{n}{4}(n^3 + 2n^2 - n - 2) = \frac{n(n+2)(n+1)(n-1)}{6}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x_n = \bar{x}_n = \frac{n(n+2)(n+1)(n-1)}{6}$ và

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} &= x_{n+1} = x_n + n(n+1)(n+2)\\ &= x_{n-2} + (n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2) = \dots\\ &= 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2) = S_n.\end{aligned}$$

Bài 11 Tính tổng $S_n = 1.3.4 + 2.5.7 + 3.7.10 + \dots + n(2n+1)(3n+1)$.

Giải Tương tự như Bài 10, nghiệm riêng của phương trình sai phân

$$x_{n+1} = x_n + n(2n+1)(3n+1), x_1 = 0, n = 1, 2, \dots$$

có dạng

$$\bar{x}_n = n(\frac{3}{2}n^3 - \frac{4}{3}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{3}) = \frac{n}{6}(9n^3 - 8n^2 - 3n + 2) = \frac{n(n-1)}{6}(9n^2 + n - 2).$$

Vậy

$$S_n = x_{n+1} = 1.3.4 + 2.5.7 + 3.7.10 + \dots + n(2n+1)(3n+1) = \frac{(n+1)n}{6}(9n^2 + 19n + 8).$$

Mệnh đề 3. *Giả sử d_n có dạng tựa đa thức $d_n = P_k(n).\alpha^{n-r}$ ($\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$), trong đó $P_k(n)$ là đa thức bậc k của n, r là một số bất kì. Khi ấy*

Trường hợp 1 *Nếu $q \neq \alpha$ thì nghiệm riêng của phương trình (4) có dạng*

$$\bar{x}_n = Q_k(n)\alpha^{n-r},$$

trong đó $Q_k(n)$ là đa thức bậc k của n.

Trường hợp 2 *Nếu $q = \alpha$ thì nghiệm riêng của phương trình (4) có dạng*

$$\bar{x}_n = nQ_k(n)\alpha^{n-r},$$

với $Q_k(n)$ là đa thức bậc k của n.

Chứng minh. Giả sử $d_n = P_k(n).\alpha^{n-r}$. Đổi biến $x_n = y_n\alpha^{n-r}$ và thay vào phương trình (4) ta được $\alpha y_{n+1} = qy_n + P_k(n)$ hay

$$y_{n+1} = \frac{q}{\alpha}y_n + \frac{1}{\alpha}P_k(n). \quad (9)$$

Trường hợp 1 Giả sử $q \neq \alpha$, tức là $\frac{q}{\alpha} \neq 1$. Khi ấy theo Mệnh đề 2, nghiệm riêng của (9) là
$$\bar{y}_n = Q_k(n).$$

Suy ra $\bar{x}_n = Q_k(n)\alpha^{n-r}$.

Trường hợp 2 Giả sử $q = \alpha$. Cũng theo Mệnh đề 2, nghiệm riêng của (9) là $\bar{y}_n = nQ_k(n)$.
□

Suy ra $\bar{x}_n = nQ_k(n)\alpha^{n-r}$.

Nhận xét Nếu $q = 1 \neq \alpha$ thì bao giờ ta cũng có Trường hợp 1. Do đó nếu $d_n = P_k(n).\alpha^{n-r}$ thì ta tìm nghiệm riêng của (4) dưới dạng $\bar{x}_n = Q_k(n)\alpha^{n-r}$.

Bài 12 Tính tổng ($\alpha \neq 1$)
$$S_n(\alpha) = \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \cdots + n\alpha^n \tag{10}$$

Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + n\alpha^n, x_1 = 0, n = 1, 2, \ldots$ Nghiệm riêng của phương trình được tìm dưới dạng $\bar{x}_n = (c_0 n + c_1)\alpha^n$. Thay vào phương trình ta được đẳng thức đúng với mọi n:
$$(c_0(n+1) + c_1)\alpha^{n+1} = (c_0 n + c_1)\alpha^n + n\alpha^n$$

hay $(c_0(n+1) + c_1)\alpha = (c_0 n + c_1)\alpha + n\alpha$. So sánh hệ số hai vế ta được:

$c_0\alpha = c_0 + 1$. Suy ra $c_0 = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

$(c_0 + c_1)\alpha = c_1$. Suy ra $c_1 = \dfrac{c_0\alpha}{\alpha - 1} = -\dfrac{\alpha}{(\alpha - 1)^2}$.

Vậy $\bar{x}_n = (\dfrac{n}{\alpha - 1} - \dfrac{\alpha}{(\alpha - 1)^2})\alpha^n = \dfrac{\alpha^n(n\alpha - n - \alpha)}{(\alpha - 1)^2}$.

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $x_n = C + \dfrac{\alpha^n(n\alpha - n - \alpha)}{(\alpha - 1)^2}$.

Vì $x_1 = 0$ nên $C = \dfrac{\alpha}{(\alpha - 1)^2}$. Vậy
$$S_n = x_{n+1} = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2} + \frac{\alpha^{n+1}(n\alpha - n - \alpha)}{(\alpha - 1)^2} = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2}(n\alpha^{n+1} - (n+1)\alpha^n + 1).$$

Ta cũng có thể chứng minh công thức
$$S_n = \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \cdots + n\alpha^n = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2}(n\alpha^{n+1} - (n+1)\alpha^n + 1)$$

như sau. Nhận hai vế của (10) với $\alpha - 1$ ta được:
$$\begin{aligned}
S_n(\alpha - 1) &= (\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \cdots + n\alpha^n)(\alpha - 1) \\
&= \alpha^2 + 2\alpha^3 + 3\alpha^4 + \cdots + (n-1)\alpha^n + n\alpha^{n+1} - (\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \cdots + n\alpha^n) \\
&= -(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^n) + n\alpha^{n+1} = n\alpha^{n+1} - \alpha(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^{n-1}) \\
&= n\alpha^{n+1} - \alpha\frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} = \frac{n\alpha^{n+2} - n\alpha^{n+1} + \alpha - \alpha^{n-1}}{\alpha - 1}
\end{aligned}$$

Vậy $S_n = \dfrac{n\alpha^{n+2} - n\alpha^{n+1} + \alpha - \alpha^{n-1}}{(\alpha-1)^2}$.

Bài 13 Tính tổng $S_n(\alpha) = 1 + 4\alpha + 9\alpha^2 + \cdots + n^2\alpha^{n-1}$ với $\alpha \neq 1$

Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + n^2\alpha^{n-1}, x_1 = 0, n = 1, 2, \ldots$ Nghiệm riêng của phương trình được tìm dưới dạng $\bar{x}_n = (c_0n^2 + c_1n + c_2)\alpha^{n-1}$. Thay vào phương trình $x_{n+1} = x_n + n^2\alpha^{n-1}$ ta được đẳng thức đúng với mọi n:

$$(c_0(n+1)^2 + c_1(n+1) + c_2)\alpha^n = (c_0n^2 + c_1n + c_2)\alpha^{n-1} + n^2\alpha^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (c_0(n+1)^2 + c_1(n+1) + c_2)\alpha = (c_0n^2 + c_1n + c_2) + n^2$$

So sánh hệ số của n^2: $c_0\alpha = c_0 + 1$. Suy ra $c_0 = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

So sánh hệ số của n: $(2c_0 + c_1)\alpha = c_1$. Suy ra $c_1 = -\dfrac{2c_0\alpha}{\alpha - 1} = -\dfrac{2\alpha}{(\alpha-1)^2}$.

So sánh hệ số của n^0: $(c_0 + c_1 + c_2)\alpha = c_2$. Suy ra $c_2 = -\dfrac{(c_0+c_1)\alpha}{\alpha - 1} = -\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha-1)^3}$.

Vậy $\bar{x}_n = (\dfrac{n^2}{\alpha-1} - \dfrac{2\alpha n}{(\alpha-1)^2} + \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha-1)^3})\alpha^{n-1}$.

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$s_n = C + (\frac{n^2}{\alpha-1} - \frac{2\alpha n}{(\alpha-1)^2} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha-1)^3})\alpha^{n-1}$$

Vì $x_1 = 0$ nên $C = -\dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$. Vậy

$$\begin{aligned} S_n = x_{n+1} &= -\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3} + (\frac{(n+1)^2}{\alpha-1} - \frac{2\alpha(n+1)}{(\alpha-1)^2} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha-1)^3})\alpha^n \\ &= \frac{n^2\alpha^n(\alpha-)^2 - 2n\alpha^n(\alpha-1) + (\alpha^n-1)(\alpha+1)}{(\alpha-1)^3}. \end{aligned}$$

Mệnh đề 4. *Giả sử d_n có dạng $d_n = a\sin nx + b\cos nx$ $(x \neq 2k\pi)$ thì nghiệm riêng của phương trình (4) có dạng $\bar{x}_n = A\sin nx + B\cos nx$.*

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} &\bar{x}_{n+1} = A\sin(n+1)x + B\cos(n+1)x = \\ &= A(\sin nx\cos nx + \cos nx\sin nx) + B(\cos nx\cos nx - \sin nx\sin nx). \end{aligned}$$

Thay vào phương trình (4) ta được đẳng thức đúng với mọi n:

$$\begin{aligned} &A(\sin nx\cos nx + \cos nx\sin nx) + B(\cos nx\cos nx - \sin nx\sin nx) \\ &= A\sin nx + B\cos nx + a\sin nx + b\cos nx. \end{aligned}$$

So sánh hệ số hai vế của $\sin nx$ và $\cos nx$ ta được

$$\begin{cases} A\cos x - B\sin x = A + a \\ A\sin x + B\cos x = B + b \end{cases} \quad hay \begin{cases} A(\cos x - 1) - B\sin x = a; \\ A\sin x + B(\cos x - 1) = b. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có định thức

$$D = \begin{vmatrix} \cos x - 1 & -\sin x \\ \sin x & \cos x - 1 \end{vmatrix} = 2(1 - \cos x) = 4\sin^2\frac{x}{2} > 0 \text{ với mọi } x \neq 2k\pi.$$

Từ đây ta xác định được duy nhất

$$A = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & -\sin x \\ b & \cos x - 1 \end{vmatrix}}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} = \frac{a(\cos x - 1) + b\sin x}{4\sin^2\frac{x}{2}} \tag{13a}$$

và

$$B = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \cos x - 1 & a \\ \sin x & b \end{vmatrix}}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} = \frac{b(\cos x - 1) - a\sin x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} \tag{13b}$$

□

Bài 14 Tính tổng $S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$.

Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + \sin nx, x_1 = 0, n = 1, 2, \ldots$ Áp dụng công thức với $a = 1, b = 0$ ta được

$$A = \frac{\cos x - 1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} = -\frac{1}{2}; B = \frac{-\sin x}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} = \frac{-2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{4\sin^2\dfrac{x}{2}} = \frac{-\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Vậy

$$\bar{x}_n = A\sin nx + B\cos nx = -\frac{1}{2}\sin nx - \frac{\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}\cos nx$$

$$= -\frac{\sin nx\sin\dfrac{x}{2} + \cos nx\cos\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} = -\frac{\cos(nx - \dfrac{x}{2})}{2\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $x_n = C - \dfrac{\cos(nx - \frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Vì $x_1 = 0$ nên $C = \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$. Vậy

$$S_n = x_{n+1} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{\cos(nx - \frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(nx - \frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Bài 15 Tính tổng $S_n = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$.

Giải Xét phương trình sai phân $x_{n+1} = x_n + \cos nx, x_1 = 0, n = 1, 2, \ldots$ Áp dụng công thức với $a = 0, b = 1$ ta được

$$A = \frac{\sin x}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}; B = \frac{\cos x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy

$$\begin{aligned}\bar{x}_n = A\sin nx + B\cos nx &= \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\sin nx - \frac{1}{2}\cos nx\\ &= \frac{\sin nx\cos\frac{x}{2} - \cos nx\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(nx - \frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $x_n = C + \dfrac{\sin(nx - \frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Vì $x_1 = 0$ nên $C = -\frac{1}{2}$. Vậy

$$S_n = x_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(nx - \frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{-\sin\frac{x}{2} + \sin(nx - \frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos(\frac{n+1}{2})x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Mệnh đề 5. *(Nguyên lí chồng chất nghiệm) Giả sử $d_n = d_n^{(1)} + d_n^{(2)}$ và $x_n^{(i)}, i = 1, 2$ là nghiệm riêng của các phương trình $ax_{n+1} + bx_n = d_n^{(i)}, i = 1, 2$. Khi ấy $x_n = x_n^{(i)} + x_n^{(i)}$ là nghiệm riêng của phương trình $ax_{n+1} + bx_n = d_n^{(i)} + d_n^{(i)}$.*

Chứng minh. Vì $x_n^{(i)}, i = 1, 2$ tương ứng là nghiệm của các phương trình $ax_{n+1} + bx_n = d_n^{(i)}, i = 1, 2$ nên $ax_{n+1}^{(1)} + bx_n^{(1)} = d_n^{(1)}$ và $ax_{n+1}^{(2)} + bx_n^{(2)} = d_n^{(2)}$. Nếu $x_n = x_n^{(1)} + x_n^{(2)}$ thì

$$ax_{n+1} + bx_n = a(x_{n+1}^{(1)} + x_{n+1}^{(2)}) + b(x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) = ax_{n+1}^{(1)} + bx_n^{(1)} + ax_{n+1}^{(2)} + bx_n^{(2)} = d_n^{(1)} + d_n^{(2)}.$$

Vậy $x_n = x_n^{(i)} + x_n^{(i)}$ là nghiệm của phương trình $ax_{n+1} + bx_n = d_n^{(i)} + d_n^{(i)}$. Như vậy, để tìm nghiệm riêng của $ax_{n+1} + bx_n = d_n^{(i)} + d_n^{(i)}$, ta chỉ cần tìm nghiệm riêng của các phương trình đơn giản hơn $ax_{n+1} + bx_n = d_n^{(i)}, i = 1, 2$. □

Mệnh đề này dễ dàng mở rộng cho trường hợp $d_n = \sum_{i=1}^{k} d_n^{(i)}$.

Các công thức nghiệm phương trình sai phân cũng rất có ích trong giải các bài toán tổng hợp. Thí dụ:

Bài 16 Xét dãy số $x_0 = 2, x_n = 3x_{n-1} + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3, n = 1, 2, 3, \ldots$ Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p thì dãy $\sum_{i=1}^{p-1} u_i$ chia hết cho p.

Giải Vì $q = 3 \neq 1$ nên nghiệm riêng của phương trình đã cho có thể tìm dưới dạng $\bar{x}_n = C_0n^3 + C_1n^2 + C_2n + C_3$.

Thay vào phương trình ta được đồng nhất thức đúng với mọi n:

$$C_0n^3 + C_1n^2 + C_2n + C_3 = 3(C_0(n-1)^3 + C_1(n-1)^2 + C_2(n-1) + C_3) + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3.$$

Suy ra $C_0 = -1, C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Vậy $\bar{x}_n = -n^3$.

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $x_n = C3^n - n^3$.

Vì $x_0 = 2$ nên $C = 2$. Nghiệm tương ứng với $x_0 = 2$ là $x_n = 23^n - n^3$.

Do đó $\sum_{i=1}^{p-1} x_i = 2\sum_{i=1}^{p-1} 3^i - \sum_{i=0}^{p-1} i^3$.

Với $p = 2$ thì $x_0 = 2$ và $x_0 \vdots 2$.

Với $p = 3$ thì $x_1 + x_2 = 5 + 10 = 15$ nên $x_1 + x_2 \vdots 3$.

Vì p là số nguyên tố lẻ nên $p = 2k + 1$. Theo công thức Bài 7 ta có

$$\sum_{i=0}^{p-1} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + (p-2)^3 + (p-1)^3 = \frac{(p-1)^2p^2}{4} = k^2p^2$$

chia hết cho p. Mặt khác, theo Định lý nhỏ Fecmat,

$$2\sum_{i=1}^{p-1} 3^i = 2.3(1 + 3 + \cdots + 3^{p-2}) = 2.3.\frac{3^{p-1} - 1}{3 - 1} = 3(3^{p-1} - 1)$$

chia hết cho số nguyên tố p. Vậy $\sum_{i=1}^{p-1} x_i = 2\sum_{i=1}^{p-1} 3^i - \sum_{i=0}^{p-1} i^3$ chia hết cho p.

Một số bài tập

Bài 17 Chứng minh các công thức sau:

1) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$.

2) $1^5+2^5+\cdots+n^5=\dfrac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$.

3) $1^6+2^6+\cdots+n^6=\dfrac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$.

4) $1^7+2^7+\cdots+n^7=\dfrac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$.

5) $1^8+2^8+\cdots+n^8=\dfrac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$.

6) $1^9+2^9+\cdots+n^9=\dfrac{1}{20}n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)$.

7) $1^{10}+2^{10}+\cdots+n^{10}=\dfrac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)$.

Bài 18 Tính tổng lũy thừa bậc bốn của các số tự nhiên lẻ

$$S_n=1^4+3^4+5^4+\cdots+(2n-1)^4.$$

Bài 19 Tính tổng $S_n=1.2+2.5+3.8+\cdots+n(3n-1)$.
Bài 20 Tính tổng $S_n=1.3+2.4+3.5+\cdots+n(n+2)+(n+1)(n+3)$.
Bài 21 Tính tổng $S_n=1.2.3+2.3.5+3.4.7+4.5.9+\cdots+n(n+1)(2n+1)$.
Bài 22 Tính tổng $S_n=1.2.3.4+2.3.4.5+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$.
Bài 23 Tính tổng $S_n=1+8\alpha+17\alpha^2+\cdots+n^3\alpha^{(n-1)}$ với $\alpha\neq 1$.

Kết luận Phương trình sai phân cho *một phương pháp* nhất quán tính tổng (theo công thức nghiệm của phương trình sai phân). Có thể sử dụng phương pháp qui nạp để chứng minh các tổng này, tuy nhiên phương pháp qui nạp thường đòi hỏi phải *dự đoán trước* tổng đó. Điều này không phải lúc nào cũng dễ dàng.

Các ví dụ trong bài cũng gợi ý, ta có thể sáng tạo thêm nhiều tổng hữu hạn và chứng minh chúng bằng cùng một *phương pháp phương trình sai phân.*

Thực chất ta mới chỉ sử dụng một mệnh đề rất nhỏ (Mệnh đề 2). Nếu sử dụng các kiến thức khác của phương trình sai phân, chắc chắn ta sẽ còn được những kết quả thú vị nữa, không chỉ cho bài toán tính tổng. Tất nhiên, phương pháp phương trình sai phân chỉ có thể tính được một số lớp các tổng. Để giải quyết bài toán tính tổng, cần sử dụng và kết hợp các phương pháp khác nữa. Xem, thí dụ, [1]-[6].

Các tác giả chân thành cám ơn PGS TS Tạ Duy Phượng đã biên tập bài viết này.

Tài liệu

[1] Nguyễn Thị Minh Châu, Một số bài toán liên quan đến dãy số có quy luật ở cấp THCS, Kỉ yếu Hội nghị Khoa học *Các Chuyên đề toán học bồi dưỡng học sinh giỏi*, Chủ biên: Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Hữu Độ, Hội toán học Hà Nội, 2012. trang 50-72.

[2] Nguyễn Văn Mậu, *Một số bài toán chọn lọc về dãy số*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2006.

[3] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Tuấn, *Chuyên đề chọn lọc Dãy số và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.

[4] Nguyễn Văn Ngọc, Một số bài toán về tính tổng, Kỉ yếu Hội nghị Khoa học Các Chuyên đề toán học & Ứng dụng, Chủ biên: Nguyễn Văn Mậu, Hội toán học Hà Nội, Bắc Giang 27-29/11/2009, trang 83-89.

[5] Nguyễn Văn Ngọc, *Tổng lũy thừa và các số Bernoulli*, Kỉ yếu Hội nghị Khoa học *Các Chuyên đề toán Olympic*, Chủ biên: Nguyễn Văn Mậu, Hội toán học Hà Nội, Ba Vì, 22-23/5/2010, trang 136-143.

[6] Nguyễn Văn Ngọc, *Một số bài toán về cấp số và tổng hữu hạn*, Kỉ yếu Hội nghị Khoa học *Các Chuyên đề chuyên toán học bồi dưỡng học sinh giỏi Trung học Phổ thông*, Chủ biên: Nguyễn Văn Mậu, Hội toán học Hà Nội, Nam Định, 27-28/11/2010, trang 37-53.

[7] Tạ Duy Phượng, Phạm Thị Hồng Lý, *Chuyên đề Phương trình sai phân*, Trong Bộ sách *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi Giải toán trên máy tính điện tử.* Nhà xuất bản Giáo dục, 2005-2006-2008.

[8] Lê Sáng, *Dãy số và các vấn đề liên quan*, Nhà xuất bản Đà Nẵng, 1994.

Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Lê Hồ Quý
Trường THPT Duy Tân, Kon Tum

Bất đẳng thức có vị trí đặc biệt trong toán học không chỉ như là những đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng vai trò như là một công cụ đắc lực cho các mô hình toán học liên tục cũng như các mô hình toán học rời rạc trong lý thuyết phương trình, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn... Trong hầu hết các kỳ thi học sinh giỏi toán quốc gia, thi Olympic Toán khu vực và quốc tế, các bài toán liên quan đến bất đẳng thức cũng hay được đề cập và thường thuộc loại khó hoặc rất khó. Để đáp ứng cho nhu cầu bồi dưỡng học sinh giỏi, bài viết này xin giới thiệu một số phương pháp cơ bản để chứng minh bất đẳng thức.

1 Kiến thức cơ bản

1.1 Định nghĩa bất đẳng thức

Nếu x là một số thực dương, ta kí hiệu $x > 0$.
Nếu x là một số thực âm, ta kí hiệu $x < 0$.
Số thực a gọi là lớn hơn số thực b, kí hiệu $a > b$ nếu $a - b$ là một số thực dương, tức là $a - b > 0$. Lúc đó, ta cũng có thể viết $b < a$.
Ta có

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$

1.2 Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

Tính chất bắc cầu

$a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$.

Tính chất liên quan đến phép cộng và phép trừ

$a > b \Leftrightarrow a \pm c > b \pm c$

Tính chất liên quan đến phép nhân và phép chia

Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$ và $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
Nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc$ và $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Nhân hai bất đẳng thức với nhau

Nếu $a > b > 0$ và $c > d > 0$ thì $ac > bd$.
Nếu $b < a < 0$ và $d < c < 0$ thì $ac < bd$.
Nếu $a > b > 0$ và $d < c < 0$ thì $ad < bc$.

Nghịch đảo của một bất đẳng thức

Nếu $a > b$ và $ab > 0$ thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Nếu $a > b$ và $ab < 0$ thì $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Nếu $a \geq x \geq b$ thì $|x| \leq \max\{|a|, |b|\}, |x| \geq \min\{0, |a|, |b|\}$.

Với $a, b \in \mathbb{R}$ thì $|a| + |b| \geq |a + b|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$.

1.3 Bất đẳng thức Cauchy

Với n số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$, ta luôn có

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Trong phạm vi chương trình toán phổ thông, chúng ta quan tâm nhiều nhất đến ba trường hợp riêng của bất đẳng thức Cauchy là

Trường hợp $n = 2$. Nếu a, b là các số thực không âm thì

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bất đẳng thức này còn được viết dưới hai dạng tương đương khác là

$$ab \leq \left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2 \text{ và } a^2 + b^2 \geq \tfrac{(a+b)^2}{2}.$$

Trường hợp $n = 3$. Nếu a, b, c là các số thực không âm thì

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Trong thức tế giải toán, ta còn sử dụng một dạng khác tương đương của bất đẳng thức này là

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

Trường hợp $n = 4$. Nếu a, b, c, d là các số thực không âm thì

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Tương tự như hai trường hợp trên, ta thường hay sử dụng bất đẳng thức này dưới dạng

$$abcd \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4.$$

1.4 Bất đẳng thức Bunyakovsky

Với hai bộ số thực bất kì $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$, ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho $a_i = kb_i$, với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

Ngoài ra, từ bất đẳng thức Bunyakovsky ta có thể suy ra được một hệ quả khác rất thường được sử dụng cho các bài toán bất đẳng thức dạng phân thức, đó là *bất đẳng thức Bunyakovsky dạng phân thức*. Bất đẳng thức này được phát biểu như sau

Cho $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ là hai dãy số thực với $b_i > 0, \forall i \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Tuy nhiên, trong phạm vi chương trình môn Toán phổ thông, chúng ta chỉ quan tâm nhiều đến hai trường hợp $n = 2$ và $n = 3$.

Trường hợp $n = 2$:

Nếu a, b, x, y là các số thực thì $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Nếu a, b, x, y là các số thực và $x, y > 0$ thì $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Trường hợp $n = 3$:

Nếu a, b, c, x, y, z là các số thực thì $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Nếu a, b, c, x, y, z là các số thực và $x, y, z > 0$ thì

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a + b + c)^2}{x + y + z}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

2 Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

2.1 Sử dụng định nghĩa bất đẳng thức

Ví dụ 1 (Đề thi chọn học sinh giỏi Toán Bỉ - 1979). Cho $a < b < c < d$. Hãy xếp thứ tự tăng dần các số sau

$$x = (a + b)(c + d); \quad y = (a + c)(b + d); \quad z = (a + d)(b + c).$$

Lời giải. Xét hiệu

$$\begin{aligned} y - x &= (a + c)(b + d) - (a + b)(c + d) \\ &= ab + ad + cb + cd - ac - ad - bc - bd \\ &= b(a - d) - c(a - d) \\ &= (a - d)(b - c) > 0 (\text{vì } a < b < c < d). \end{aligned}$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{(1-a)^2}+\frac{1}{(1-b)^2}+\frac{1}{(1-c)^2}\geq 1 \Leftrightarrow (\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c})^2-$$
$$-2[\frac{1}{(1-a)(1-b)}+\frac{1}{(1-b)(1-c)}+\frac{1}{(1-c)(1-a)}]\geq 1$$
$$\Leftrightarrow [\frac{3-2(a+b+c)+ab+bc+ca}{ab+bc+ca-(a+b+c)}]^2-2[\frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca-(a+b+c)}]\geq 1$$
$$\Leftrightarrow [1+\frac{3-(a+b+c)}{ab+bc+ca-(a+b+c)}]^2-2[\frac{3-(a+b+c)}{ab+bc+ca-(a+b+c)}]\geq 1$$
$$\Leftrightarrow 1+[\frac{3-(a+b+c)}{ab+bc+ca-(a+b+c)}]^2\geq 1.$$

Bất đẳng thức cuối đúng, do đó bất đẳng thức đã cho đúng.

2.3 Phương pháp làm trội, dùng tổng sai phân

Ý tưởng của phương pháp này là: Giả sử muốn chứng minh bất đẳng thức $A<B$, ta làm trội $A<C$, rồi chứng minh $C<B$.

Đôi khi để chứng minh một bất đẳng thức dạng

$$f(x_1)+f(x_2)++...+f(x_n)\leq M$$

ta có thể làm trội $f(x_i)\leq G(y_{i+1})-G(y_i)$ để thu được

$$f(x_1)+f(x_2)++...+f(x_n)\leq G(y_n)-G(y_1).$$

Sau đó ta chỉ còn chứng minh một bất đẳng thức đơn giản hơn là

$$G(y_n)-G(y_1)\leq M.$$

Chú ý

1. Cho ba số dương a,b,x. Khi đó
   Nếu $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$.
   Nếu $\frac{a}{b}>1$ thì $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$.
2. Một số tổng sai phân thường dùng
(a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}$.
(b) $\frac{1}{x(x+d)}+\frac{1}{(x+d)(x+2d)}+...+\frac{1}{[x+(n-1)d](x+nd)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+nd}\right)=\frac{n}{x(x+nd)}$.
(c) $\frac{1}{1.2...k}+\frac{1}{2.3...(k+1)}+....+\frac{1}{n(n+1)...(n+k-1)}=$
$=\frac{1}{k-1}\left[\frac{1}{1.2...(k-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+k-1)}\right], \forall k\geq 2.$

Ví dụ 6. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{2005^2}<\frac{2004}{2005}.$$

Lời giải. Ta có với $\forall k \geq 1$ thì $k^2 > k(k-1) > 0$ nên

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Cho $k = 2; 3; 4; ...; 2005$, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2},\\
&\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\\
&\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{1}{2005^2} < \frac{1}{2004.2005} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005},
\end{aligned}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức cùng chiều, ta được

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 - \frac{1}{2005} = \frac{2004}{2005}.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Nhận xét. Với mọi số nguyên dương $n > 1$, ta có

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

Bài toán trên ứng với $n = 2005$.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, ta có

$$\frac{n+1}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

Lời giải. Trong bài này, khi làm trội ta phải chia biểu thức thành nhiều nhóm, rồi làm trội từng nhóm.

Đặt $P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^n-1}$.

* *Chứng minh $P < n$.* Ta có

$$\begin{aligned}
P = 1 &+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^3 - 1}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^4 - 1}\right)\\
&+ \dots + + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}\right).
\end{aligned}$$

Thay các phân số trong mỗi ngoặc bằng phân số lớn nhất trong mỗi nhóm, ta được

$$P < 1 + \frac{1}{2}.2 + \frac{1}{2^2}.4 + \frac{1}{2^3}.8 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.2^{n-1} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n.$$

* *Chứng minh* $P > \frac{n+1}{2}$. Ta có

$$P = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2+1} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{2^4}\right)$$
$$+ ... + + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + ... + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n}.$$

Làm trội bằng cách thay các phân số trong mỗi ngoặc bằng phân số nhỏ nhất trong mỗi nhóm, ta được

$$P > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}.2 + \frac{1}{2^3}.4 + ... + \frac{1}{2^n}.2^{n-1} - \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2^n}$$
$$\Rightarrow P > 1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2} + \frac{2^{n-1}-1}{2^n} \geq \frac{n+1}{2}.$$

2.4 Phương pháp quy nạp

Một bất đẳng thức phụ thuộc vào số nguyên dương n được xem là đúng nếu thỏa mãn cả hai điều kiện

+ Bất đẳng thức đúng với giá trị đầu tiên của n.

+ Từ giả thiết bất đẳng thức đúng với $n = k (k \in \mathbb{N})$, ta suy ra được bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Để chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp quy nạp, ta thực hiện các bước

+ *Bước 1.* Kiểm tra bất đẳng thức đúng với giá trị đầu tiên của n.

+ *Bước 2.* Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

+*Bước 3.* Kết luận bất đẳng thức đã cho đúng.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Lời giải. Với $n = 1$, bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3.1+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \text{ (đúng).}$$

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng khi $n = k$ $(k \geq 1)$, nghĩa là

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}.$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k + 1$, tức là

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2k-1}{2k}.\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2k-1}{2k}.\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2}.$$

Bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k + 1$ khi

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}}.\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}} \Leftrightarrow (2k+1)\sqrt{3k+4} < (2k+2)\sqrt{3k+1}$$
$$\Leftrightarrow (2k+1)^2(3k+4) < (2k+2)^2(3k+1)$$
$$\Leftrightarrow k > 0 \text{ (đúng)}.$$

Do đó, bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k + 1$, nên theo nguyên lý quy nạp bất đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n.

Nhận xét. Ở bài này, nếu giải bằng phương pháp làm trội thì ta sẽ gặp khó khăn khi đánh giá

$$\frac{2k-1}{2k} < \sqrt{\frac{3k-2}{3k+1}}, \quad \forall k \geq 1.$$

Ví dụ 9. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Lời giải. Với $n = 2$, ta có

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{14}{24} > \frac{13}{24} \text{ (đúng)}.$$

Giả sử bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k$ $(k \geq 2)$, nghĩa là

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}.$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k + 1$, tức là

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}.$$

Thật vậy, ta có

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k+2} = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$$
$$> \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{13}{14}.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, do đó bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 2$.

2.5 Phương pháp phản chứng

Để chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$, ta giả sử $A < B$, sau đó bằng suy luận và các phép toán đi đến một mâu thuẫn. Như vậy, bất đẳng thức $A \geq B$ đúng, hay ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 10 (Ireland 1997). Cho $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq abc.$$

Lời giải. Nếu trong ba số có một số bằng 0 thì bất đẳng thức được chứng minh. Vì thế, ta chỉ cần xét $a, b, c > 0$.

Giả sử ngược lại $a^2 + b^2 + c^2 < abc$, khi đó $abc > a^2 + b^2 + c^2 > a^2$ nên $a < bc$.

Tương tự, ta có $b < ca, c < ab$. Từ đó suy ra $a + b + c < ab + bc + ca$ (1)

Mặt khác, ta lại có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ nên

$$abc > a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow abc > ab + bc + ca (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $abc > a + b + c$ (mâu thuẫn với giả thiết).

Ví dụ 11 (USA 2001). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng có ít nhất hai trong số các bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6; \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6; \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6.$$

Lời giải. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. Khi đó $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx \geq 1$.
Ta phải chứng minh có ít nhất hai trong ba bất đẳng thức sau đúng

$$2x + 3y + 6z \geq 6; \quad 2y + 3z + 6x \geq 6; \quad 2z + 3x + 6y \geq 6.$$

Giả sử khẳng định này sai, tức là có ít nhất hai trong ba bất đẳng thức trên sai. Không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$2x + 3y + 6z < 6 \text{ và } 2y + 3z + 6x < 6.$$

Cộng hai bất đẳng thức này lại, ta được

$$8x + 5y + 9z < 12.$$

Từ giả thiết $xy + yz + zx \geq 1$, ta suy ra

$$x(y + z) \geq 1 - yz \Rightarrow x \geq \frac{1 - yz}{y + z}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} 8\frac{1 - yz}{y + z} + 5y + 9z < 12 &\Leftrightarrow 8(1 - yz) + (5y + 9z)(y + z) < 12(y + z) \\ &\Leftrightarrow 5y^2 + 6yz + 9z^2 - 12y - 12z + 8 < 0 \\ &\Leftrightarrow (y + 3z - 2)^2 + 4(y - 1)^2 < 0 \text{ (vô lí)} \end{aligned}$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ khẳng định của bài toán là đúng. Bất đẳng thức đã được chứng minh.

2.6 Phương pháp sử dụng các bất đẳng thức kinh điển

2.6.1. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy

a) Kỹ thuật sử dụng Cauchy trực tiếp

Ví dụ 12. Cho $a, b \geq 0$ thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$. Chứng minh rằng

$$ab(a+b)^2 \leq \frac{1}{64}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\sqrt{ab}(a+b) \leq \frac{1}{8}$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$, ta có

$$\sqrt{ab}(a+b) = \frac{1}{2}(2\sqrt{ab})(a+b) \leq \frac{1}{2}\frac{\left(a+b+2\sqrt{ab}\right)^2}{4} = \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^4}{8} = \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2\sqrt{ab} = a+b \\ \sqrt{a}+\sqrt{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 13. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c+d)}} \geq \frac{a}{\frac{a+b+c+d}{2}} = \frac{2a}{a+b+c+d}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{\frac{b}{c+d+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c+d};$$

$$\sqrt{\frac{c}{d+a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c+d};$$

$$\sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq \frac{2d}{a+b+c+d}.$$

Cộng các vế tương ứng của bốn bất đẳng thức trên, ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = b + c + d \\ b = c + d + a \\ c = d + a + b \\ d = a + b + c. \end{cases}$$

Thế nhưng, hệ này không có nghiệm dương. Do đó, đẳng thức không xảy ra được. Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Kỹ thuật ghép đối xứng

Trong nhiều bài toán, mà biểu thức ở hai vế tương đối phức tạp, việc chứng minh trực tiếp trở nên khó khăn thì ta có thể sử dụng kỹ thuật "ghép đối xứng" để bài toán trở nên đơn giản hơn.

Ở các bài toán bất đẳng thức, thông thường chúng ta hay gặp phải hai dạng toán sau

*** Dạng 1.** Chứng minh $X + Y + Z \geq A + B + C$

Ý tưởng. Nếu ta chứng minh được $X + Y \geq 2A$. Sau đó, tương tự hóa để chỉ ra $Y + Z \geq 2B$ và $Z + X \geq 2C$ (nhờ tính đối xứng của bài toán). Sau đó, cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi rút gọn cho 2, ta được điều phải chứng minh.

*** Dạng 2.** Chứng minh $XYZ \geq ABC$, với $X, Y, Z \geq 0$.

Ý tưởng. Nếu ta chứng minh được $XY \geq A^2$. Sau đó, tương tự hóa để chỉ ra $YZ \geq B^2$ và $ZX \geq C^2$ (nhờ tính đối xứng của bài toán). Sau đó, nhân ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi lấy căn bậc hai, ta được

$$XYZ \geq \sqrt{A^2B^2C^2} = |ABC| \geq ABC.$$

Ví dụ 14. Cho ba số thực dương x, y, z, d thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}.$$

Lời giải. Viết lại bất đẳng thức trên dưới dạng đồng bậc là

$$\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2} \geq \sqrt{5}(x + y + z).$$

Nếu chỉ ghép đơn giản $\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} \geq \sqrt{5}z$ thì ta không thu được điều cần chứng minh; vì đánh giá $\sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} \geq \sqrt{5}z$ không phải luôn đúng (chẳng hạn $x = y = 0, z = 1$). Ở bài toán này, ta vẫn sẽ sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng nhưng sẽ "ghép" một cách tinh tế hơn. Đó là

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} \geq \frac{\sqrt{5}(x + y)}{2} &\Leftrightarrow 2x^2 + xy + 2y^2 \geq \frac{5}{4}(x + y)^2 \\ &\Leftrightarrow 2(x + y)^2 - 3xy \geq \frac{5}{4}(x + y)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x + y)^2}{4} \geq xy \text{ (đúng theo Cauchy).} \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{2y^2+yz+2z^2} \geq \frac{\sqrt{5}(y+z)}{2}$$
$$\sqrt{2z^2+zx+2x^2} \geq \frac{\sqrt{5}(z+x)}{2}.$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức trên, ta thu được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

c) Kỹ thuật đặt ẩn phụ kết hợp Cauchy

Trong bất đẳng thức, có một quy luật chung là "Trong một dạng cụ thể, những bất đẳng thức càng nhiều biến càng khó". Điều này, đồng nghĩa với việc khẳng định: "Bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn nếu ta đưa được một bất đẳng thức nhiều biến về dạng ít biến". Kỹ thuật đặt ẩn phụ chính là một công cụ hữa ích để thực hiện ý tưởng này.

Ví dụ 15. Cho x, y là hai số thực khác 0. Chứng minh rằng

$$\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2} \geq 3.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2y^2} \geq 5.$$

Đặt $t = \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2y^2} \Rightarrow \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4}{t}$, ta được bất đẳng thức đơn giản là

$$t+\frac{4}{t} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{t^2-5t+4}{t} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t-4)}{t} \geq 0.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta dễ thấy $t \geq 4$. Suy ra $t-1 > 0, t-4 \geq 4$. Từ đó, ta được $\frac{(t-1)(t-4)}{t} \geq 0$. Bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 16. Cho ba số thực $x, y, z > 2$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1$. Chứng minh rằng

$$(x-2)(y-2)(z-2) \leq 1.$$

Lời giải. Với giả thiết x, y, z đều lớn hơn 2, ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ để đưa bài toán về dạng đơn giản và quen thuộc hơn. Hãy xét lời giải sau:

Đặt $x = a+2, y = b+2, z = c+2$ với $a > 0, b > 0, c > 0$. Bài toán quy về chứng minh $abc \leq 1$, với $a, b, c > 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+2}+\frac{b}{b+2}+\frac{c}{c+2} = 1.$$

Đến đây, ta đặt tiếp

$$m = \frac{1}{a+2},\ n = \frac{1}{b+2},\ p = \frac{1}{c+2} \Rightarrow m+n+p = 1.$$

Ta có
$$\frac{1}{m}=\frac{a+2}{a}=1+\frac{2}{a}\Rightarrow\frac{2}{a}=\frac{1}{m}-1=\frac{n+p}{m}\Rightarrow a=\frac{2m}{n+p}.$$

Tương tự, ta cũng có
$$b=\frac{2n}{p+m};\quad c=\frac{2p}{m+n}.$$

Do đó, bất đẳng thức trở thành
$$\frac{2m}{n+p}.\frac{2n}{p+m}.\frac{2p}{m+n}\le 1\Leftrightarrow (m+n)(n+p)(p+m)\ge 8mnp.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có
$$(m+n)(n+p)(p+m)\ge 2\sqrt{mn}.2\sqrt{np}.2\sqrt{pm}=8mnp.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$m=n=p\Leftrightarrow a=b=c=1\Leftrightarrow x=y=z=3.$$

2.6.2. Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky

a) Chứng minh bất đẳng thức nguyên

Ví dụ 17. Cho $x,y,z>0$ và $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng
$$x^3+y^3+z^3\ge 3.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có
$$x^3+y^3+z^3=\frac{x^4}{x}+\frac{y^4}{y}+\frac{z^4}{z}\ge\frac{(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}=\frac{9}{x+y+z}.$$

Bài toán được quy về chứng minh
$$\frac{9}{x+y+z}\ge 3\Leftrightarrow x+y+z\ge 3\Leftrightarrow (x+y+z)^2\le 9.$$

Kết quả này đúng theo bất đẳng thức Bunyakovsky
$$(x+y+z)^2\le(1+1+1)(x^2+y^2+z^2)=9.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Nhận xét. Bất đẳng thức đã cho có thể viết lại dưới dạng
$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^3}{(x^3+y^3+z^3)^2}\le 3.$$

Đây chính là *Đề thi Olympic Toán của Singapore năm 2001.*

a) Chứng minh bất đẳng thức phân

Ví dụ 18 (IMO 2005). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2}.$$

Lời giải. Ta có $\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2} = 1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{a^5+b^2+c^2}$. Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{1}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{1}{c^5 + a^2 + b^2} \leq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta được

$$(a^5 + b^2 + c^2)(\frac{1}{a} + b^2 + c^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} \leq \frac{\frac{1}{a} + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{b^5 + c^2 + a^2} \leq \frac{\frac{1}{b} + c^2 + a^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}, \quad \frac{1}{c^5 + a^2 + b^2} \leq \frac{\frac{1}{c} + a^2 + b^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức trên, ta được

$$P \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 2(a^2 + b^2 + c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Khi đó, bài toán được đưa về chứng minh

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 2(a^2 + b^2 + c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \leq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Do $abc \geq 1$ và $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ nên

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{abc}{a} + \frac{abc}{b} + \frac{abc}{c} = ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Tài liệu

[1] Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu (2004), *Old and New Inequalities,* GIL Publishing House.

[2] J. Michael Steele, (2004), *The Cauchy - Schwarz Master Class,* Cambridge University Press.

[3] Vasile Cirtoaje (2006), *Algebraic Inequalities: Old and New Methods*, GIL Publishing House.

[4] Nguyễn Văn Mậu (2005), *Bất đẳng thức, Định lý và áp dụng*,NXB Giáo Dục.

[5] Phạm Kim Hùng (2006), *Sáng tạo bất đẳng thức*, NXB Tri Thức.

[6] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh (2009), *Bất đẳng thức và những lời giải hay*, NXB Hà Nội.

[7] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh (2010), *Sử dụng phương pháp Cauchy - Schwarz để giải toán bất đẳng thức*, NXB ĐHSP Hà Nội.

Nhìn một số bài toán bất đẳng thức theo nhiều hướng

Hoàng Minh Quân, THPT Ngọc Tảo, Hà Nội

Tiếp cận bài toán theo nhiều hướng khác nhau sẽ giúp chúng ta có nhiều cách giải cho bài toán đó.Trong bài viết này chúng ta sẽ xem xét các bài toán bất đẳng thức trong một số kì thi olympic toán quốc tế hay các kì thi olympic toán của Mỹ - Một nước phát triển về toán học. Để từ đó thông qua các bài toán này ngoài việc nhằm minh họa các kĩ thuật khác nhau trong chứng minh bất đẳng thức, bài viết còn nêu ra một số cách tiếp cận để tìm lời giải cho bài toán bất đẳng thức.

Ý tưởng trình bày nhiều cách giải cho một số bài toán bất đẳng thức olympic nhằm giúp học sinh cách tiếp cận bài toán bất đẳng thức với nhiều khía cạnh khác nhau để tiến đến hướng giải đúng cho bài toán bất đẳng thức trong chuyên đề này, xuất phát từ việc tác giả được nghe câu chuyện thú vị của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu kể về bất đẳng thức IMO 1995 trong hội thảo khoa học môn toán ở trường Cao đẳng Tuyên Quang tháng 12/2012.

I. Một số dạng bất đẳng thức cơ bản

1. Bất đẳng thức AM-GM (Bất đẳng thức Cauchy)

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm, thì

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số thực tuỳ ý, thì

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, trong đó ta sử dụng quy ước: nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0.

3. Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức

Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực và $y_1, y_2, \ldots, y_n$, là các số thực dương, thì
$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}.$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$.

4. Bất đẳng thức Holder

Cho các số thực dương a với $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Chúng ta có

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{ij}}\right)^m.$$

Một kết quả chúng ta thường sử dụng
Cho $a, b, c, x, y, z, m, n, p$ là các số thực dương. Khi đó chúng ta có

$$\left(a^3 + b^3 + c^3\right)\left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(m^3 + n^3 + p^3\right) \geq (axm + byn + czp)^3$$

II. Nhìn bài toán bất đẳng thức qua các kỳ olympic theo nhiều hướng

Bài toán 1 (IMO 1995)
Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Nhận xét 1

Bài toán này khi tiếp cận, chúng ta thấy vế trái của bất đẳng thức có dạng phân số, bậc của mẫu số lớn hơn bậc của tử số. Điều đó giúp chúng ta nghĩ tới bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng phân thức. Đến đây nếu áp dụng trực tiếp luôn, chúng ta có:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{(1+1+1)^2}{a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b)}$$

Khi đó bài toán trở nên phức tạp hơn, và chúng ta sẽ gặp khó khăn trong giải quyết bài toán đó. Vì vậy để ý một chút chúng ta thấy rằng $\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)}$, lúc này việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz dạng phân thức mang lại hiệu quả rõ rệt
Lời giải 1

Ta có:

$$\begin{aligned}
VT(1) &= \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \\
&= \frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)} + \frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)} + \frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)} \\
&\geqslant \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}
\end{aligned}$$

Vậy $VT(1) \geqslant \dfrac{ab+bc+ca}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$VT(1) \geqslant \frac{ab+bc+ca}{2} \geqslant \frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2} = \frac{3}{2} = VP(1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Lời giải 2

Đặt $x = ab, y = bc, z = ca$ thì x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$.
Bất đẳng thức đã cho được viết lại như sau

$$\frac{1}{a^2(ab+ac)} + \frac{1}{b^2(bc+ba)} + \frac{1}{c^2(ca+cb)} \geq \frac{3}{2}$$

Chúng ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2(ab+ac)} + \frac{1}{b^2(bc+ba)} + \frac{1}{c^2(ca+cb)} &= \frac{y}{xz(x+z)} + \frac{z}{xy(x+y)} + \frac{x}{yz(y+z)} \\
&= \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức, chúng ta có

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c = 1$.

Nhận xét 2

Quan sát điều kiện , chúng ta thấy $abc = 1$. Mà tử số của mỗi phân số trong biểu thức bằng 1. Vậy để tận dụng giả thiết chúng ta sẽ thay số 1 bởi $a^2b^2c^2$ và từ đó chúng ta có $\dfrac{1}{a^3(b+c)} = \dfrac{a^2b^2c^2}{a^3(b+c)} = \dfrac{b^2c^2}{a(b+c)}$, tương tự $\dfrac{1}{b^3(a+c)} = \dfrac{a^2c^2}{b(a+c)}, \dfrac{1}{c^3(a+b)} = \dfrac{a^2b^2}{c(a+b)}$.
Như vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2b^2}{c(a+b)} + \frac{b^2c^2}{a(b+c)} + \frac{c^2a^2}{b(a+c)} \geq \frac{3}{2}$$

Đến đây chúng ta có nhiều hướng để tiếp cận.
Tiếp cận theo hướng sử dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz dạng phân thức chúng ta có

Lời giải 3

Chúng ta có

$$\frac{a^2b^2}{c(a+b)}+\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(a+c)}\geq\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$VT(1)\geqslant\frac{ab+bc+ca}{2}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2}=\frac{3}{2}=VP(1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.
Tiếp cận theo hướng sử dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz thông thường , chúng ta có

Lời giải 4

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, chúng ta có

$$[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]\left(\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\right)\geq(bc+ca+ab)^2.$$

Do đó chúng ta có

$$\frac{a^2b^2}{c(a+b)}+\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(a+c)}\geq\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$VT(1)\geqslant\frac{ab+bc+ca}{2}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2}=\frac{3}{2}=VP(1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.
Tiếp cận theo hướng chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cauchy chúng ta có

Lời giải 5

Ý tưởng cho lời giải theo cách này xuất phát từ việc chúng ta dễ dàng dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$. Do đó chúng ta chứng minh như sau

$$\frac{a^2b^2}{c(a+b)}+\frac{c(a+b)}{4}\geq ab$$
$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{a(b+c)}{4}\geq bc$$
$$\frac{c^2a^2}{b(a+c)}+\frac{b(a+c)}{4}\geq ca$$

Cộng các bất đẳng thức lại, chúng ta có

$$\frac{a^2b^2}{c(a+b)}+\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(a+c)}\geq\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$VT(1)\geqslant\frac{ab+bc+ca}{2}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2}=\frac{3}{2}=VP(1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.
Tiếp cận theo tích vô hướng của 2 vec tơ, chúng ta có
Lời giải 6
Xét hai vec tơ

$$\overrightarrow{OA}=\left(\sqrt{a\left(b+c\right)};\sqrt{b\left(c+a\right)};\sqrt{c\left(a+b\right)}\right),$$
$$\overrightarrow{OB}=\left(\frac{bc}{\sqrt{a\left(b+c\right)}};\frac{ca}{\sqrt{b\left(c+a\right)}};\frac{ab}{\sqrt{c\left(a+b\right)}}\right)$$

Gọi α với $0\leq\alpha\leq\pi$ là góc giữa hai vec tơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$.
Chúng ta có

$$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{2\left(ab+bc+ca\right)},$$
$$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{\frac{b^2c^2}{a\left(b+c\right)}+\frac{c^2a^2}{b\left(c+a\right)}+\frac{a^2b^2}{c\left(a+b\right)}}.$$

và

$$\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\alpha\leq\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|$$
$$\leq\sqrt{2\left(ab+bc+ca\right)}.\sqrt{\frac{b^2c^2}{a\left(b+c\right)}+\frac{c^2a^2}{b\left(c+a\right)}+\frac{a^2b^2}{c\left(a+b\right)}}$$

Mặt khác lại có

$$\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}=ab+bc+ca.$$

từ đó chúng ta có

$$ab+bc+ca\leq\sqrt{2\left(ab+bc+ca\right)}.\sqrt{\frac{b^2c^2}{a\left(b+c\right)}+\frac{c^2a^2}{b\left(c+a\right)}+\frac{a^2b^2}{c\left(a+b\right)}}$$

tương đương

$$\frac{a^2b^2}{c(a+b)}+\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(a+c)}\geq\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$VT(1) \geqslant \frac{ab+bc+ca}{2} \geqslant \frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2} = \frac{3}{2} = VP(1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 1' Tổng quát hóa bất đẳng thức IMO 1995

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$ và số $\lambda \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^\lambda(b+c)} + \frac{1}{b^\lambda(c+a)} + \frac{1}{c^\lambda(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ thì

$$\frac{1}{a^\lambda(b+c)} + \frac{1}{b^\lambda(c+a)} + \frac{1}{c^\lambda(a+b)} = \frac{x^{\lambda-1}}{y+z} + \frac{y^{\lambda-1}}{z+x} + \frac{z^{\lambda-1}}{x+y}.$$

Vì bất đẳng thức đối xứng nên chúng ta giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó chúng ta có

$$x^{\lambda-2} \geq y^{\lambda-2} \geq z^{\lambda-2}, \frac{1}{y+z} > \frac{1}{z+x} > \frac{1}{x+y}$$

và

$$\frac{x^{\lambda-2}}{y+z} \geq \frac{y^{\lambda-2}}{z+x} \geq \frac{z^{\lambda-2}}{x+y}.$$

Sử dụng bất đẳng thức sắp xếp theo thứ tự, chúng ta có

$$\frac{x^{\lambda-1}}{y+z} + \frac{y^{\lambda-1}}{z+x} + \frac{z^{\lambda-1}}{x+y} \geq z.\frac{x^{\lambda-2}}{y+z} + x.\frac{y^{\lambda-2}}{z+x} + y.\frac{z^{\lambda-2}}{x+y};$$
$$\frac{x^{\lambda-1}}{y+z} + \frac{y^{\lambda-1}}{z+x} + \frac{z^{\lambda-1}}{x+y} \geq y.\frac{x^{\lambda-2}}{y+z} + z.\frac{y^{\lambda-2}}{z+x} + x.\frac{z^{\lambda-2}}{x+y}.$$

Cộng hai bất đẳng thức này lại, chúng ta có

$$\begin{aligned}\frac{x^{\lambda-1}}{y+z} + \frac{y^{\lambda-1}}{z+x} + \frac{z^{\lambda-1}}{x+y} &\geq \frac{1}{2}\left(x^{\lambda-2} + y^{\lambda-2} + z^{\lambda-2}\right)\\ &\geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^{\lambda-2}y^{\lambda-2}z^{\lambda-2}}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy bất đẳng thức tổng quát được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét

Với $\lambda = 3$ ta được bất đẳng thức IMO 1995 và đây cũng là **lời giải 7** cho bất đẳng thức này.

Bài toán 2 (IMO 2001)

Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1. \quad (2)$$

Tiếp cận bài toán chúng ta thấy *vế trái của bất đẳng thức có dạng phân thức*, như vậy chúng ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức , hơn nữa bất đẳng thức mới dễ chứng minh hơn. Từ đó chúng ta có lời giải sau.

Lời giải 1

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. chúng ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab}}$$

Mặt khác chúng ta có

$$a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab} \leq \sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)}$$

Vậy chúng ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)}} \geq 1$$

tương đương

$$(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

Quan sát bài toán chúng ta thấy đây là bất đẳng thức thuần nhất, điều đó gợi cho ta nghĩ tới kĩ thuật chuẩn hóa để đơn giản hóa bài toán hơn, từ đó chúng ta có cách xử lí tiếp theo. Từ đó chúng ta có lời giải sau.

Lời giải 2

Chuẩn hóa $abc = 1$, chúng ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8abc}{a^3}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{a^3}}}$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{a^3}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{b^3}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{c^3}}} \geq 1.$$

Đặt $x = \dfrac{2}{a}, y = \dfrac{2}{b}, z = \dfrac{2}{c}$. Khi đó $xyz = 8$, ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^3}} \geq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, chúng ta có

$$\sqrt{1+x^3} = \sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} \leq \frac{x^2+2}{2}$$

hay

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \geq \frac{2}{x^2+2}.$$

tương tự

$$\frac{1}{\sqrt{1+y^3}} \geq \frac{2}{y^2+2}, \frac{1}{\sqrt{1+z^3}} \geq \frac{2}{z^2+2}.$$

Vậy chúng ta cần chứng minh

$$\frac{2}{x^2+2} + \frac{2}{y^2+2} + \frac{2}{z^2+2} \geq 1$$

quy đồng và thu gọn ta được bất đẳng thức tương đương

$$x^2+y^2+z^2 \geq 12$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng vì theo AM-GM, chúng ta có

$$x^2+y^2+z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3\sqrt[3]{8^2} = 12.$$

Vậy đẳng thức đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Lời giải 3

Áp dụng bất đẳng thức Holder, chúng ta có

$$(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}})^2\left[a(a^2+8bc)+b(b^2+8ac)+c(c^2+8ab)\right] \geq (a+b+c)^3.$$

tương đương

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)^2 \geq \frac{a+b+c)^3}{a(a^2+8bc)+b(b^2+8ac)+c(c^2+8ab)}.$$

Vậy chúng ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a+b+c)^3}{a(a^2+8bc)+b(b^2+8ac)+c(c^2+8ab)} \geq 1$$

tương đương

$$a+b+c)^3 \geq a(a^2+8bc)+b(b^2+8ac)+c(c^2+8ab),$$

tương đương

$$(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc,$$

tương đương

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

Lời giải 4

Chuẩn hóa $a+b+c=1$. Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0;1)$.

Chúng ta có $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}},\quad f''(x)=\frac{3}{4x^2\sqrt{x}}>0,\quad \forall x\in(0;1)$.

Do đó hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ lồi trên khoảng $(0;1)$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen, chúng ta có

$$af\left(a^2+8bc\right)+bf\left(b^2+8ac\right)+cf\left(c^2+8ab\right)\geq f\left(a^3+b^3+c^3+24abc\right)$$

hay

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq\frac{1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}},$$

Vậy chúng ta cần chứng minh

$$\frac{1}{a^3+b^3+c^3+24abc}\geq 1$$

tương đương

$$1\geq a^3+b^3+c^3+24abc$$

tương đương

$$(a+b+c)^3\geq a^3+b^3+c^3+24abc$$

tương đương

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$$

Đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

Lời giải 5

Trước hết chúng ta chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geq\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}}.\quad (*)$$

Đem bình phương hai vế chúng ta viết lại bất đẳng thức trên như sau

$$\left(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}\right)^2\geq\sqrt[3]{a^2}\left(a^2+8bc\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, chúng ta có

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}\right)^2-\left(\sqrt[3]{a^4}\right)^2&=\left(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}+\sqrt[3]{a^4}\right)\left(\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}\right)\\&\geq 4\sqrt[3]{a^2bc}\cdot 2\sqrt[3]{b^2c^2}\\&=8\sqrt[3]{a^2}\cdot bc.\end{aligned}$$

tương đương

$$\left(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}\right)^2\geq\left(\sqrt[3]{a^4}\right)^2+8\sqrt[3]{a^2}\cdot bc=\sqrt[3]{a^2}\left(a^2+8bc\right),$$

tương đương

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}}.$$

Thực hiện tương tự cho hai số hạng còn lại của bất đẳng thức, ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}}+\frac{\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}}+\frac{\sqrt[3]{c^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}}.$$

hay

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Do đó chúng ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét

Chứng minh trên cũng là đáp án của kì thi IMO 2001 nhưng điều nhiều bạn đọc quan tâm là "Làm sao tìm được (*) ?, do chủ quan của người ra đề hay một sự ngẫu nhiên nào đó mà chúng ta có ? và nếu thay bởi một đánh giá khác, chẳng hạn

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, \ldots$$

thì liệu có đúng không ?" Câu trả lời là "không". Thật ra để tìm được (*) chúng ta dựa vào "phương pháp hệ số bất định" một phương pháp rất hay được sử dụng trong việc chứng minh các bất đẳng thức dạng phân thức hoặc đa thức. Xét bài toán tổng quát sau đây.

Tìm tất cả các giá trị của k sao cho bất đẳng thức dưới đây luôn đúng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^k}{a^k+b^k+c^k}. \quad (1.1)$$

Cho $b=c=1$, thì bất đẳng thức (1.1) trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8}} \geq \frac{a^k}{a^k+2},$$

tương đương với

$$f(a)=a^{k+2}-2a^{2k}+a^2 \geq 0. \quad (1.2)$$

Ta cần tìm k để (1.2) đúng, tức phải có $f(a) \geq 0$ kết hợp với $f(1)=0$ và $f'(1)=0$. (Chi tiết xem thêm trong tài liệu tham khảo [3])Mặt khác thì ta lại tính được

$$f'(a)=(k+2)\,a^{k+1}-4ka^{2k-1}+2a.$$

Nên việc $f'(1)=0$ sẽ tương đương với $(k+2)-4k+2=0$. Giải phương trình này ta được $k=\dfrac{4}{3}$. Như vậy ta dự đoán bất đẳng thức sau đây đúng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}}.$$

Đó chính là cơ sở để chúng ta có lời giải như trên.
Một bài toán có hình thức tương tự và có thể giải theo kĩ thuật sử dụng phương pháp hệ số bất định như lời giải 4 bài toán IMO 2001.
Bài toán tự luyện: Cho các số thực không âm a, b, c sao cho không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(a+c)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geqslant 1$$

Chỉ dẫn : Hãy chứng minh bất đẳng thức phụ sau

$$\sqrt{\frac{a^3}{(a^3+(b+c)^3}} \geq \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Bằng một số cách chứng minh tương tự bạn đọc có thể giải bài toán sau.
Bài toán 2' (Bài toán tổng quát IMO 2001)
Cho các số thực dương $a, b, c > 0, \lambda \geq 8,$ Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}} \geq \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}.$$

Bài toán 3 (IMO 2008)
Cho ba số thực x, y, z tất cả đều khác 1và thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1. \quad (3)$$

Lời giải 1
Nhìn vào bài toán chúng ta nghĩ ngay tới việc đơn giản hóa bằng cách đổi biến, vậy thì chúng ta cứ đổi biến đã và thay thế vào các điều kiện đề bài ra để tìm ra mối liên hệ giải toán. Trong quá trình làm bài để ra kết quả đúng đôi khi là nhưng chuỗi các phép thử và sai. May mắn thay bài toán này theo con đường đổi biến cho chúng ta lời giải khá ngắn gọn.Chúng ta có lời giải như sau.
Đặt $a=\frac{x}{x-1}, b=\frac{y}{y-1}, c=\frac{z}{z-1}$. Khi đó $x=\frac{a}{a-1}, y=\frac{b}{b-1}, z=\frac{c}{c-1}$.
Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $a^2+b^2+c^2 \geq 1$ (3.1).
Từ điều kiện $xyz = 1$ chúng ta có

$$\frac{a}{a-1}\frac{b}{b-1}\frac{c}{c-1}=1,$$

tương đương

$$abc=(a-1)(b-1)(c-1),$$

tương đương

$$a+b+c-1=ab+bc+ca$$

tương đương

$$2(a+b+c-1)=(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

tương đương
$$a^2+b^2+c^2-1=(a+b+c-1)^2\geq 0$$
Do đó
$$a^2+b^2+c^2\geq 1.$$
Vậy bất đẳng thức (3.1) được chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b+c=1$.

Lời giải 2

Xuất phát từ giả thiết $xyz=1$,điều đó gợi cho chúng ta thấy đây là một kết quả của định lí Viet với phương trình bậc ba. Biểu thức vế trái của bất đẳng thức đã cho cũng biểu diễn được qua các tính chất nghiệm của phương trình bậc ba theo định lí Viet. Từ đó chúng ta có ý tưởng giải theo cách sau.

Đặt $x+y+z=a,\ xy+yz+zx=b,\ xyz=1,\ x,\ y,\ z$ là các nghiệm của phương trình bậc ba
$$t^3-at^2+bt-1=0.$$
Nếu $t=1$ là nghiệm của phương trình thì $1^3-a\cdot 1^2+b\cdot 1-1=0\Leftrightarrow a-b=0\ \therefore t\neq 1\Leftrightarrow a-b\neq 0$.

Nếu phương trình bậc ba có các nghiệm là $\alpha=\dfrac{x}{x-1},\ \beta=\dfrac{y}{y-1},\ \gamma=\dfrac{z}{z-1}$ thì chúng ta có phương trình
$$\left(\frac{t}{t-1}\right)^3-a\left(\frac{t}{t-1}\right)+b\cdot\frac{t}{t-1}-1=0.$$
tương đương
$$(a-b)t^3-(a-2b+3)t^2-(b-3)t-1=0. \qquad (*)$$
Đặt $a-b=p\neq 0,\ b-3=q$ Chúng ta viết lại phương trình (*) như sau
$$pt^3-(p-q)t^2-qt-1=0.$$
Theo định lí Viet chúng ta có
$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{p-q}{p}=1-\frac{q}{p},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{q}{p}.$$
$$\begin{aligned}\therefore \frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}&=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\\ &=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\ &=\left(1-\frac{q}{p}\right)^2-2\left(-\frac{q}{p}\right)\\ &=\left(\frac{q}{p}\right)^2+1\geq 1.\end{aligned}$$
Vậy chúng ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{q}{p}=0\Leftrightarrow q=0\Leftrightarrow b=3\Leftrightarrow xy+yz+zx=3$.

Lời giải 3

Xuất phát từ $x,\ y,\ z$ tất cả đều khác 1,chúng ta có ý tưởng đặt $x=a+1,\ y=b+1,\ z=c+1.(abc\neq 0)$.

Chúng ta có

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}=\frac{(a+1)^2}{a^2}+\frac{(b+1)^2}{b^2}+\frac{(c+1)^2}{c^2},$$
$$=3+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$
$$=3+\frac{2(ab+bc+ca)}{abc}+\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{(abc)^2}\quad (*).$$

Đặt $a+b+c=p$, $ab+bc+ca=q$, $abc=r\neq 0$, chúng ta có $xyz=1\Leftrightarrow p+q+r=0$. Từ $r\neq 0$, chúng ta viết lại (*) như sau

$$\begin{aligned}(*)&=3+\frac{2q}{r}+\frac{q^2-2rp}{r^2}\\&=3+\frac{2q}{r}+\left(\frac{q}{r}\right)^2-2\frac{p}{r}\\&=3+\frac{2q}{r}+\left(\frac{q}{r}\right)^2+2\frac{q+r}{r}=\left(\frac{q}{r}\right)^2+4\frac{q}{r}+5\\&=\left(\frac{q}{r}+2\right)^2+1\geq 1.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $q=-2r$ và $p+q+r=0$ $(r>0)\Leftrightarrow p:q:r=1:(-2):1$.

Lời giải 4

Đặt $\frac{1}{a}=\frac{x}{x-1},\frac{1}{b}=\frac{y}{y-1},\frac{1}{c}=\frac{z}{z-1}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 1$$

tương đương

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geq (abc)^2.\qquad (3.2)$$

Từ $xyz=1$, chúng ta có

$$ab+bc+ca=a+b+c+abc$$

Bình phương hai vế, chúng ta có

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(a^2bc+b^2ca+c^2ab)=a^2+b^2+c^2+(abc)^2+2(ab+bc+ca+a^2bc+b^2ca+c^2ab)$$

tương đương

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2=a^2+b^2+c^2+(abc)^2+2(ab+bc+ca)$$

tương đương

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2=(abc)^2+(a+b+c)^2$$

Do đó

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geq (abc)^2$$

Vậy bất đẳng thức (3.2) được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a+b+c)^2 = 0$ hay $a+b+c=0$

Bài toán 4 (USAMO 2003) Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8. \quad (4)$$

Lời giải 1
Chúng ta có nhận xét sau

$$3 - \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} = \frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}.$$

Do đó bất đẳng thức đã cho được viết lại thành

$$\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{2(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{2(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \ge 1. \quad (4.1)$$

Áp dụng các bất đẳng thức cơ bản

$$(a+b)^2 \le 2\left(a^2+b^2\right), (b+c)^2 \le 2\left(b^2+c^2\right), (c+a)^2 \le 2\left(c^2+a^2\right).$$

Chúng ta có

$$VT(4.1) \ge \frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+2\left(b^2+c^2\right)} + \frac{2(c+a-b)^2}{2b^2+2\left(c^2+a^2\right)} + \frac{2(a+b-c)^2}{2c^2+2\left(a^2+b^2\right)}.$$

Vậy chúng ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+c^2+a^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+a^2+b^2} \ge 1.$$

tức là chỉ cần chứng minh

$$(b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2 \ge a^2+b^2+c^2.$$

tương đương

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \ge 0.$$

tươn đương

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.
Lời giải 2
Chúng ta có nhận xét sau

$$3 - \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} = \frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}.$$

Do đó bất đẳng thức đã cho được viết lại thành

$$\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{2(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{2(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge 1. \qquad (4.1)$$

Chuẩn hóa $a+b+c=3$ chúng ta đưa về chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2(3-2a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{2(3-2b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{2(3-2c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\ge 1$$

tương đương

$$\frac{(3-2a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3-2b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3-2c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\ge \frac{1}{2}.$$

Mặt khác chúng ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{(3-2x)^2}{2x^2+(3-x)^2}\ge -\frac{2}{3}x+\frac{5}{6} \qquad (4.2)$$

thật vậy bất đẳng thức tương đương

$$\frac{4x^2-12x+9}{3x^2-6x+9}\ge -\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}$$

tương đương

$$4x^3-5x^2-2x+3\ge 0.$$

tương đương

$$(x-1)^2(4x+3)\ge 0 \quad \text{luôn đúng.}$$

Áp dụng bất đẳng thức (4.2), chúng ta có

$$\frac{(3-2a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3-2b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3-2c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\ge -\frac{2}{3}(a+b+c)+3.\frac{5}{6}=-\frac{2}{3}.3+\frac{5}{2}=\frac{1}{2}.$$

Vậy chúng ta được điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét 1: Trong cách giải này bạn đọc thấy rằng bất đẳng thức (4.2) chính là mấu chốt để giải quyết gọn gàng bài toán. Vậy làm sao để nghĩ ra bất đẳng thức 4.2 và khi nào thì chúng ta sử dụng đến kĩ thuật này. Chúng tôi xin được chia sẻ như sau.

Để tìm ra bất đẳng thức (4.2) chúng tôi sử dụng *phương pháp tiếp tuyến* và biểu thức $-\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}$ xuất hiện ở vế phải của bất đẳng thức (4.2) chính là phương trình tiếp tuyến $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}$ tại điểm có hoành độ $x=1$ của đường cong $y=\dfrac{(3-2x)^2}{2x^2+(3-x)^2}$.

Phương pháp tiếp tuyến được sử dụng khi bài toán bất đẳng thức có dạng cho $a+b+c=k$. Chứng minh rằng $f(a)+f(b)+f(c)\ge m$ hoặc $f(a)+f(b)+f(c)\le M$.

Nhận xét 2 Bạn đọc cũng có thể tạo ra bất đẳng thức (4.2) bằng phương pháp hệ số

bất định tương tự như **lời giải 4** của kì thi IMO 2001 bằng cách thiết lập như sau:
Chúng ta cần tìm một số k để bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{(3-2x)^2}{2x^2+(3-x)^2} \geq k(x-1)+\frac{1}{6}$$

Lời giải 3
Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Bất đẳng thức đã cho được viết lại thành

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leq 8.$$

Chúng ta để ý rằng

$$\frac{3(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}=\frac{3(a^2+6a+9)}{3a^2-6a+9}=\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}=1+\frac{8a+6}{(a-1)^2+2} \leq 1+\frac{8a+6}{2} \leq 4a+4.$$

Suy ra

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2} \leq \frac{4a+4}{3}.$$

Tương tự, chúng ta có

$$\frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2} \leq \frac{4b+4}{3}, \frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leq \frac{4c+4}{3}$$

Do đó chúng ta có

$$\begin{aligned}\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2} &\leq \frac{4a+4}{3}+\frac{4b+4}{3}+\frac{4c+4}{3}\\ &=\frac{4}{3}(a+b+c)+4=8.\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.
Lời giải 4
Đặt $x=a+b, y=b+c, z=c+a$.
Chúng ta có $x+z=2a+b+c$ nên $2a=x+z-(b+c)=x+z-y$, tương tự chúng ta có $2b=x+y-z, 2c=y+z-x$.
Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2}+\frac{2(z+y)^2}{(z+y-x)^2+2x^2}+\frac{2(y+x)^2}{(y+x-z)^2+2z^2} \leq 8.$$

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản dạng $2(m^2+n^2) \geq (m+n)^2$ chúng ta có

$$2(x+z-y)^2+2y^2 \geq (x+z-y+y)^2=(x+z)^2.$$

Do đó chúng ta có

$$\frac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2} = \frac{4(x+z)^2}{2(x+z-y)^2+4y^2} \leq \frac{4(x+z)^2}{(x+z)^2+2y^2}$$
$$= \frac{4}{1+2\frac{y^2}{(x+z)^2}} \leq \frac{4}{1+2\frac{y^2}{2(x^2+z^2)}}$$
$$= \frac{4(x^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$$

Chứng minh tương tự, chúng ta có

$$\frac{2(z+y)^2}{(z+y-x)^2+2x^2} \leq \frac{4(z^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{2(y+x)^2}{(y+x-z)^2+2z^2} \leq \frac{4(y^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2}.$$

Cộng các bất đẳng tức lại chúng ta có

$$\frac{2(x+z)^2}{(x+z-y)^2+2y^2} + \frac{2(z+y)^2}{(z+y-x)^2+2x^2} + \frac{2(y+x)^2}{(y+x-z)^2+2z^2} \leq \frac{8(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} = 8.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hay $a=b=c$.

Bài toán 5 (USA MO 2011)
Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \leq 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3. \quad (5)$$

Lời giải 1
Từ giả thiết $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \leq 4$ chúng ta có $2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \leq 4$.
Do đó $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \leq 2$.
Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2} + \frac{2bc+2}{(b+c)^2} + \frac{2ca+2}{(c+a)^2} \geq 6.$$

Chúng ta có

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2} \geq \frac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{(a+b)^2},$$

tương đương

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2} \geq 1 + \frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2}$$

tương tự chúng ta có

$$\frac{2bc+2}{(b+c)^2} \geq 1 + \frac{(c+a)(a+b)}{(b+c)^2},$$

$$\frac{2ca+2}{(c+a)^2} \geq 1 + \frac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại, ta được

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2} + \frac{2bc+2}{(b+c)^2} + \frac{2ca+2}{(c+a)^2} \geq 3 + \frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2} + \frac{(c+a)(a+b)}{(b+c)^2} + \frac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2}.$$

Vậy chúng ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2} + \frac{(c+a)(a+b)}{(b+c)^2} + \frac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2} \geq 3$$

Đây là bất đẳng thức đúng theo Cauchy.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Nhận xét Trong lời giải này, tiếp cận bài toán chúng ta thấy bất đẳng thức đã cho chưa đồng bậc. Vậy ý tưởng ban đầu của chúng ta là đồng bậc hóa bất đẳng thức. Để ý từ giả thiết chúng ta có $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \leq 2$. Chính vì vậy chúng ta đem nhân 2 vế của bất đẳng thức đã cho với 2 để xuất hiện số 2 ở tử số, từ đó sử dụng giả thiết và chúng ta có lời giải như trên.

Lời giải 2

Từ điều kiện $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \leq 4$ chúng ta có $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 \leq 4$.

Đặt $x = a+b, y = b+c, z = c+a$ thì $x^2+y^2+z^2 \leq 4$.

Với cách đặt trên chúng ta có

$$a = \frac{x-y+z}{2}, b = \frac{x+y-z}{2}, c = \frac{-x+y+z}{2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sum_{cyc} \frac{x^2-y^2-z^2+2yz+4}{4x^2} \geq 3$$

Chúng ta có

$$\sum_{cyc} \frac{x^2-y^2-z^2+2yz+4}{4x^2} = \sum_{cyc} \frac{(4-y^2-z^2)+x^2+2yz}{4x^2} \geq \sum_{cyc} \frac{2x^2+2yz}{4x^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sum_{cyc} \frac{yz}{x^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, chúng ta có

$$\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} \geq 3.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Cuối cùng để kết thúc bài viết sau đây tôi xin trình bày một số hướng tiếp

cận bằng cách ứng dụng các bất đẳng thức để đưa ra lời giải cho bài hệ phương trình trong kì thi HSG QG VMO-2013.
Trong ngày thi thứ nhất kì thi HSG QG (VMO-2013) có bài toán giải hệ phương trình như sau.
Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}} = \sqrt{\frac{20y}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{20x}{x+y}} \end{cases}$$

Đây là bài toán giải hệ phương trình nhưng thực chất là bài toán chứng minh các bất đẳng thức với điều kiện đẳng thức xảy ra. Chính vì vậy chúng ta sẽ có nhiều hướng tiếp cận cho bài toán này. Sau đây chúng tôi xin trình bày một số ý tưởng và lời giải theo các hướng tiếp cận đó.
Lời giải 1 (Tiếp cận với ý tưởng sử dụng bất đẳng thức vec tơ)
Quan sát vế trái của mỗi phương trình trong hệ phương trình đã cho , chúng ta đều thấy biểu thức vế trái có dạng $\sqrt{a^2+b^2}$, rất tự nhiên chúng ta nghĩ tới việc sử dụng bất đẳng thức về độ dài vec tơ. Từ đó chúng ta có lời giải như sau.
Điều kiện $\sin 2x \sin 2y \neq 0,\ xy > 0$.
Đem cộng hai phương trình của hệ phương trình đã cho, ta có

$$\left(\sqrt{sin^2 x + \frac{1}{sin^2 x}} + \sqrt{cos^2 x + \frac{1}{cos^2 x}}\right) + \left(\sqrt{sin^2 y + \frac{1}{sin^2 y}} + \sqrt{cos^2 y + \frac{1}{cos^2 y}}\right) = \sqrt{\frac{20x}{x+y}} + \sqrt{\frac{20y}{x+y}}. \quad (1)$$

Xét hai vec tơ $\overrightarrow{u}\left(|\sin x|; \dfrac{1}{|\sin x|}\right)$, $\overrightarrow{v}\left(|\cos x|; \dfrac{1}{|\cos x|}\right)$.
Áp dụng bất đẳng thức vec tơ $|\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| \geq |\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|$ và bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} &\geq \sqrt{(|\sin x| + |\cos x|)^2 + \left(\frac{1}{|\sin x|} + \frac{1}{|\cos x|}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{1 + |\sin 2x| + \frac{4\,(1 + |\sin 2x|)}{\sin^2 2x}} \\ &\geq \sqrt{1 + |\sin 2x| + \frac{4\,(1 + |\sin 2x|)}{|\sin 2x|}} \\ &= \sqrt{5 + \left(|\sin 2x| + \frac{1}{|\sin 2x|}\right) + \frac{3}{|\sin 2x|}} \\ &\geq \sqrt{5 + 2 + 3} = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\sqrt{sin^2 y + \frac{1}{sin^2 y}} + \sqrt{cos^2 y + \frac{1}{cos^2 y}} \geq \sqrt{10}.$$

Từ đó VT (1) $\geq 2\sqrt{10}$.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\text{VP (1)} = \left(\sqrt{\frac{20y}{x+y}} + \sqrt{\frac{20x}{x+y}}\right)^2 \leq 2\left(\frac{20(x+y)}{x+y}\right) = 40$$

suy ra

$$\sqrt{\frac{20y}{x+y}} + \sqrt{\frac{20x}{x+y}} \leq 2\sqrt{10}.$$

Vậy đẳng thức $VT(1) = VP(1) = 2\sqrt{10}$ xảy ra khi và chỉ khi $x = y; |\sin 2x| = 1$.

Từ $|\sin 2x| = 1$ ta có $\cos 2x = 0$, kết hợp $x = y$ thì $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Thay $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ vào hệ phương trình đã cho ta có

$\sin^2 x = \cos^2 x = \sin^2 y = \cos^2 y = \frac{1}{2}$ và $\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x+y} = \frac{1}{2}$ thỏa mãn đề bài.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét Để chứng minh $VP(1) \leq 2\sqrt{10}$, ngoài cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz như đã trình bày thì chúng ta có thể chọn điểm rơi và sử dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$\sqrt{\frac{20x}{x+y}} + \sqrt{\frac{20y}{x+y}} = \sqrt{10}\left[2\sqrt{\left(\frac{x}{x+y}\right)\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\left(\frac{x}{x+y}\right)\frac{1}{2}}\right] \leq \sqrt{10}\left[\frac{x}{x+y} + \frac{1}{2} + \frac{y}{x+y} + \frac{1}{2}\right] = 2\sqrt{10}.$$

Lời giải 2. (Sử dụng ý tưởng dựa vào đặc trưng của hàm số)

Điều kiện $\sin 2x \sin 2y \neq 0, xy > 0$.

Đem cộng hai phương trình của hệ phương trình đã cho, ta có

$$\left(\sqrt{sin^2x + \frac{1}{sin^2x}} + \sqrt{cos^2x + \frac{1}{cos^2x}}\right) + \left(\sqrt{sin^2y + \frac{1}{sin^2y}} + \sqrt{cos^2y + \frac{1}{cos^2y}}\right) = \sqrt{\frac{20x}{x+y}} + \sqrt{\frac{20y}{x+y}}. \quad (1)$$

Đặt $t = \sin^2 x, 0 < t < 1$, ta có $\cos^2 x = 1 - t$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t + \frac{1}{t}} + \sqrt{1 - t + \frac{1}{1-t}}, t \in (0; 1)$, ta có

$$f'(t) = \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{2\sqrt{t + \frac{1}{t}}} - \frac{1 - \frac{1}{(1-t)^2}}{2\sqrt{1 - t + \frac{1}{1-t}}}.$$

Ta có

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ và có } \lim_{t\to 0^+} f(t) = +\infty, \lim_{t\to 1^-} f(t) = +\infty.$$

Lập bảng biến thiên trên khoảng $(0; 1)$, ta có $f(t)_{min} = \sqrt{10}$.

Từ đó ta có $VT(1) = f(\sin^2 x) + f(\sin^2 y) \geq 2\sqrt{10}$.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$VP^2(1) = \left(\sqrt{\frac{20y}{x+y}} + \sqrt{\frac{20x}{x+y}}\right)^2 \leq 2\left(\frac{20(x+y)}{x+y}\right) = 40.$$

suy ra

$$\sqrt{\frac{20y}{x+y}} + \sqrt{\frac{20x}{x+y}} \leq 2\sqrt{10}.$$

Vậy đẳng thức $VT(1) = VP(1) = 2\sqrt{10}$ xảy ra khi và chỉ khi $x = y$; $|\sin 2x| = 1$.

Từ $|\sin 2x| = 1$ ta có $\cos 2x = 0$, kết hợp $x = y$ thì $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Thay $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ vào hệ phương trình đã cho ta có

$\sin^2 x = \cos^2 x = \sin^2 y = \cos^2 y = \frac{1}{2}$ và $\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x+y} = \frac{1}{2}$ thỏa mãn đề bài.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải 3 (Dựa vào ý tưởng sử dụng các bất đẳng thức cổ điển)

Điều kiện $\sin 2x \sin 2y \neq 0, xy > 0$.

Nhân theo vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho, ta có

$$\left(\sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}}\right)\left(\sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}}\right) = 20\sqrt{\frac{xy}{(x+y)^2}}. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}} \geq 2\sqrt[4]{\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}\right)}.$$

$$\sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} \geq 2\sqrt[4]{\left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)}.$$

Do đó

$$VT(2) \geq 4\sqrt[4]{\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}\right)}$$

mà theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) &\geq \left(|\sin x \cos x| + \frac{1}{|\sin x \cos x|}\right)^2 \\ &= \left(\frac{|\sin 2x|}{2} + \frac{1}{2|\sin 2x|} + \frac{3}{2|\sin 2x|}\right)^2 \\ &\geq \left(1 + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}\right) \geq \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

nên

$$VT(2) \geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{5}{2}\right)^4} = 10.$$

Mặt khác
$$VP(2) = 20\sqrt{\frac{xy}{(x+y)^2}} \le 20\sqrt{\frac{xy}{4xy}} = 10.$$
Vậy đẳng thức $VT(2) = VP(2) = 2\sqrt{10}$ xảy ra khi và chỉ khi $x = y; |\sin 2x| = 1$.
Từ $|\sin 2x| = 1$ ta có $\cos 2x = 0$, kết hợp $x = y$ thì $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
Thay $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ vào hệ phương trình đã cho ta có
$\sin^2 x = \cos^2 x = \sin^2 y = \cos^2 y = \frac{1}{2}$ và $\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x+y} = \frac{1}{2}$ thỏa mãn đề bài.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải 4 (Sử dụng bất đẳng thức số phức và bất đẳng thức AM-GM)
Điều kiện $\sin 2x \sin 2y \neq 0,\ xy > 0$.
Đem cộng hai phương trình của hệ phương trình đã cho ta có
$$\left(\sqrt{sin^2x + \frac{1}{sin^2x}} + \sqrt{cos^2x + \frac{1}{cos^2x}}\right) + \left(\sqrt{sin^2y + \frac{1}{sin^2y}} + \sqrt{cos^2y + \frac{1}{cos^2y}}\right) = \sqrt{\frac{20x}{x+y}} + \sqrt{\frac{20y}{x+y}}. \quad (1)$$
Xét hai số phức $z = |\sin x| + \frac{1}{|\sin x|}i;\ z' = |\cos x| + \frac{1}{|\cos x|}i$. Ta có
Áp dụng bất đẳng thức số phức $|z| + |z'| \ge |z + z'|$ và bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}; a >$
$0, b > 0.$, ta có
$$\begin{aligned}
\sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} &\ge \sqrt{(|\sin x| + |\cos x|)^2 + \left(\frac{1}{|\sin x|} + \frac{1}{|\cos x|}\right)^2} \\
&\ge \sqrt{(|\sin x| + |\cos x|)^2 + \left(\frac{4}{|\sin x| + |\cos x|}\right)^2} \\
&\ge \sqrt{(|\sin x| + |\cos x|)^2 + \frac{4}{(|\sin x| + |\cos x|)^2} + \frac{12}{(|\sin x| + |\cos x|)^2}} \\
&\ge \sqrt{4 + \frac{12}{2(sin^2x + cos^2x)}} = \sqrt{10}.
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta có
$$\sqrt{sin^2y + \frac{1}{sin^2y}} + \sqrt{cos^2y + \frac{1}{cos^2y}} \ge \sqrt{10}.$$

Do đó $VT(1) \ge 10$.
Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có
$$VP^2(1) = \left(\sqrt{\frac{20y}{x+y}} + \sqrt{\frac{20x}{x+y}}\right)^2 \le 2\left(\frac{20(x+y)}{x+y}\right) = 40.$$
tương đương
$$\sqrt{\frac{20y}{x+y}} + \sqrt{\frac{20x}{x+y}} \le 2\sqrt{10}.$$

Vậy đẳng thức $VT(1) = VP(1) = 2\sqrt{10}$ xảy ra khi và chỉ khi $x = y$; $|\sin 2x| = 1$.
Từ $|\sin 2x| = 1$ ta có $\cos 2x = 0$, kết hợp $x = y$ thì $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
Thay $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ vào hệ phương trình đã cho ta có
$\sin^2 x = \cos^2 x = \sin^2 y = \cos^2 y = \frac{1}{2}$ và $\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x+y} = \frac{1}{2}$ thỏa mãn đề bài.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải 5. (Ý tưởng tự nhiên là bình phương hai vế các phương trình của hệ để khử bỏ dấu căn bên vế phải)
Điều kiện $\sin 2x \sin 2y \neq 0,\ xy > 0$.
Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y} + 2\sqrt{\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}\right)} &= \frac{20y}{x+y} \\ \sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y} + \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2\sqrt{\left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)} &= \frac{20x}{x+y} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ, chúng ta thu được

$$2 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 y} + \frac{1}{\cos^2 y} + 2\sqrt{\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}\right)} + \\ + 2\sqrt{\left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)} = 20.$$

tương đương

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 y \cos^2 y} + 2\sqrt{\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}\right)} + \\ + 2\sqrt{\left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)} = 18.$$

tương đương

$$\frac{4}{\sin^2 2x} + \frac{4}{\cos^2 2x} + 2\left(\sqrt{\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}\right)} + \sqrt{\left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)}\right) = 18$$

Xét $VT(3)$, ta có các đánh giá sau $\frac{4}{\sin^2 2x} \geq 4; \frac{4}{\cos^2 2x} \geq 4$.
Đặt $T = 2\left(\sqrt{\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}\right)} + \sqrt{\left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)}\right)$.
Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$T \geq 4\sqrt[4]{\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}\right)}$$

Trong *lời giải 3*, ta đã chứng minh được $T \geq 10$. Do đó $VT(3) \geq 4+4+10 = 18 = VP(3)$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$; $|\sin 2x| = 1$.

Từ $|\sin 2x| = 1$ ta có $\cos 2x = 0$, kết hợp $x = y$ thì $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Thay $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ vào hệ phương trình đã cho ta có
$\sin^2 x = \cos^2 x = \sin^2 y = \cos^2 y = \frac{1}{2}$ và $\frac{x}{x+y} = \frac{y}{x+y} = \frac{1}{2}$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét: Lời giải 5 là lời giải tự nhiên theo cách bình phương khử căn thông thường, tuy nhiên đây lại là lời giải dài nhất.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ LUYỆN

Bài toán 1 (Japan MO 1997)
Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Bài toán 2(Canada MO 2012)
Cho ba số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4xyz - 4.$$

Bài toán 3 (Singapo MO 2011)
Cho ba số thực $x, y, z > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{xyz}$. Chứng minh rằng

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{2z}{\sqrt{1+z^2}} < 3.$$

Bài toán 4 (Turkey MO 2012)
Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{x(2x-y)}{y(2z+x)} + \frac{y(2y-z)}{z(2x+y)} + \frac{z(2z-x)}{x(2y+z)} \geq 1.$$

Bài toán 5 (Việt Nam MO 2008)
Cho các số thực không âm x, y, z đôi một khác nhau. Chứng minh

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2} \geq \frac{4}{xy+yz+zx}.$$

Bài toán 6 (IMO 2005) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2} + \frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5} \geq 0.$$

Bài toán 7 (Korea MO 3rd round 2011)
Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất biểu thức

$$\frac{1}{a^2-4a+9} + \frac{1}{b^2-4b+9} + \frac{1}{c^2-4c+9}$$

Bài toán 8 (IMO 2012) Cho số nguyên $n \geq 3$ và $a_2, a_3, \ldots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Mậu, Đẳng thức, so sánh và bất đẳng thức.
2. Dušan Djukić, The Imo Compendium:A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads : 1959-2004.
3. Oles Dobosevych, On a Method of Proving Symmetric Inequalities .
4. Titu Andreescu , Old and new inequalities.
5. Tạp chí toán học tuổi trẻ.
6. Tạp chí AMM.
7. Tạp chí Crux.
8. Một số đề thi các nước trên mạng internet.

Khảo sát sự hội tụ của dãy số: $U_{n+1} = f(U_n)$

Ngô Thị Hoa, Trường THPT Chuyên LVT

Báo cáo nhằm trình bày một số dạng toán từ các đề thi Olympic và phương pháp chung để khảo sát chúng.

Bài 1: Cho m là số thực dương, dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 3m}{3u_n^2 + m} \end{cases}$

Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tính giới hạn đó.

Lời giải:

*) Ta có : $u_{n+1} - \sqrt{m} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{m}\right)^3}{3u_n^2 + m}$;

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(m - u_n^2)}{3u_n^2 + m}$$

*) $u_1 < \sqrt{m} \Rightarrow$ Ta quy nạp được : $u_n < \sqrt{m}$ với $\forall n \in N^*$

Khi đó (u_n) tăng và bị chặn trên . Vậy dãy số có giới hạn.

*) $u_1 = \sqrt{m} \Rightarrow u_n = \sqrt{m}$ với $\forall n \in N^* \Rightarrow \lim u_n = \sqrt{m}$

*) $u_1 > \sqrt{m} \Rightarrow$ Ta quy nạp được : $u_n > \sqrt{m}$ với $\forall n \in N^*$,

Khi đó (u_n) giảm và bị chặn dưới. Vậy dãy số có giới hạn

Tóm lại với mọi $m > 0$, dãy số đã cho có giới hạn, chuyển qua giới hạn ở công thức truy hồi ta được $\lim u_n = \sqrt{m}$

*) *Như vậy, khi xét tính đơn điệu và bị chặn của dãy số (1), ta có thể xét dấu của $g(x) = f(x) - x$; dấu của $h(x) = f(x) - a$ (với a là các nghiệm của $g(x)$).*

Bài 2 : Cho a là số thực thỏa mãn : $|a| \geq 2$. Dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^3 - 2u_n^2 - 2}{3u_n^2 - 4u_n - 1} \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn .

Lời giải: *) Ta có : $u_{n+1} + 1 = \dfrac{(u_n+1)^2(2u_n-3)}{3u_n^2-4u_n-1}$ (1)

$$u_{n+1} - 2 = \frac{2u_n(u_n-2)^2}{3u_n^2-4u_n-1} \quad (2)$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n-2)(u_n-1)(u_n+1)}{3u_n^2-4u_n-1} \quad (3)$$

$$u_1=a;|a|\ge 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 \ge 2 \\ u_1 \le -2 \end{array}\right.$$

*) $u_1 = a > 2$ Từ (2) $\Rightarrow$ $u_n > 2, \forall n \in N^*$ $(3u_n^2 - 4u_n - 1 > 0\ \forall n \in N^*)$.

Từ (3) $\Rightarrow$ $u_{n+1} < u_n\ \forall n \in N^*$. Vậy,($u_n$) giảm và bị chặn dưới bởi 2

Chuyển qua giới hạn ta thu được : $\lim u_n = 2$

*) $u_1 = a = 2 \Rightarrow u_1 = 2; \forall n \Rightarrow \lim u_n = 2$

*) $u_1 = a \le -2 < -1$ Từ (1) $\Rightarrow$ $u_n < -1\ \forall n \in N^*$ $(3u_n^2 - 4u_n - 1 > 0\ \forall n \in N^*)$.

Từ (3) $\Rightarrow$ $u_{n+1} > u_n; \forall n \in N^* \Leftrightarrow (u_n)$ tăng và bị chặn trên

Chuyển qua giới hạn ta thu được: $\lim u_n = -1$

Vậy , với mọi a thỏa mãn: $|a| \ge 2$ dãy số đã cho có giới hạn.

__Bài 3:__ Cho số thực $a \ge 1$. Xét dãy số (x_n) xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = 1 + \ln\left(\dfrac{x_n^2}{1+\ln x_n}\right) \end{cases}$

Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó (VMO - 98)

Lời giải:

*) Xét $f(x) = 1 + \ln\left(\dfrac{x^2}{1+\ln x}\right) = 1 + 2\ln x - \ln(1+\ln x)$ với $x \ge 1$.

Có : $f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{1+\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}\left(2 - \dfrac{1}{1+\ln x}\right)$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{1+2\ln x}{1+\ln x}\right] > 0, \forall\ x \ge 1$$

Vậy, f(x) đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Do đó: $\forall\ x \ge 1$. Suy ra: $f(x) \ge f(1) = 1$.

Mà $x_1=a \ge 1$ .Vậy ta quy nạp được $x_n \ge 1$ với mọi số nguyên dương n.

*) Xét g(x) = f(x) – x = 1+2lnx – ln(1+lnx) – x với x ≥ 1.

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{1+\ln x}.\frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{x}(2 - \frac{1}{1+\ln x}) - 1$$

$$\Rightarrow g''(x) = -\frac{1}{x}(2 - \frac{1}{1+\ln x}) + \frac{1}{x}(\frac{1}{(1+\ln x)^2}.\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{(1+\ln x)^2} - 2 + \frac{1}{1+\ln x}\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{1+\ln x} - 1\right]\left[\frac{1}{1+\ln x} + 2\right] \le 0 \ \forall\ x \ge 1$$

$\Rightarrow$ g '(x) nghịch biến trên [1; +∞) $\Rightarrow$ g '(x) ≤ g '(x) = 0

$\Rightarrow$ g (x) nghịch biến trên [1; +∞)

Vậy g(x) ≤ g '(1) = 0 $\Rightarrow$ g (x) ≤ 0.

Do đó f(x) ≤ x $\forall$ x∈ [1; +∞)

Ta quy nạp được : $x_{n+1} \le x_n$ với n mọi số nguyên dương n.

Mặt khác (x_n) bị chặn dưới bởi 1.

Nên tồn tại $\lim x_n = x \ge 1$ là nghiệm của g(x) = 0.

Mà g(x) = 0 có nghiệm duy nhất x = 1 $\Rightarrow \lim x_n = 1$.

**) Nếu $u_n \in D$ (với D là một khoảng,nửa khoảng, đoạn) với mọi số nguyên dương n và hàm y=f(x) đồng biến trên D thì dãy số (u_n) đơn điệu .*

Bài 4: Cho dãy số thực :(a_n) xác định bởi:

$$0 \le a_1 \le 2;\ a_{n+1} = 3 - \frac{a_n+2}{2^{a_n}}.$$

Chứng minh rằng (a_n) có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

Lời giải:

*) Xét hàm số $f(x) = 3 - \frac{x+2}{2^x}$ với $0 \le x \le 2$

Ta có: Với x∈ [0; 2] thì : $f'(x) = \dfrac{\ln 4 + x\ln 2 - 1}{2^x} > 0$

Vậy, f(x) đồng biến trên [0 ;2].Ta có : 1= f(0) ≤ f(x) ≤ f(2) = 2. Mà $0 \le a_1 \le 2$, nên ta quy nạp được : $a_n \in [0 ; 2]$ với mọi n nguyên dương.

*) Xét g(x) = f(x) –x = 3 - $\frac{x+2}{2^x}$ – x ,Với x∈ [0; 2]. Có :

$$g'(x) = \frac{\ln 4 + x\ln 2 - 1 - 2^x}{2^x}$$

Lại xét :h(x) = ln4 + xln2 – 1-2^x , với x ∈[0;2], h'(x) = (1- 2^x)ln2 ≤ 0 , với x ∈[0;2]

Như vậy, h(x) nghịch biến trên [0;2]. Suy ra : h(x) ≤ h(0) < 0

Ta có g'(x) < 0 với mọi x thuộc [0 ;2], nên g(x) nghịch biến trên [0 ;2].

Vậy, g(x) ≥ g(2) = 0. Tức là f(x) > x trên [0 ;2]

Ta quy nạp được dãy số tăng.

Như vậy, dãy số đã cho tăng và bị chặn trên bởi 2 nên có giới hạn là nghiệm của g(x) = 0 trên [0 ;2].

Mặt khác, trên [0 ;2],g(x) = 0 có nghiệm duy nhất x=2. Nên : Lima_n=2.

<u>Bài 5:</u> (VMO 2001. bảng A)

Với mỗi cặp số thực (a;b), xét dãy số thực sau:

$x_0 = a$; $x_{n+1} = x_n + b \sin x_n$, n = 0,1,2 ...

a. Cho b= 1. Chứng minh rằng dãy này có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

b. Chứng minh rằng với b ≥ 2 thì luôn tồn tại a sao cho dãy (x_n) tương ứng không có giới hạn.

Lời giải:

a) Với b = 1, ta có dãy số tương ứng $x_0 = a; x_{n+1} = x_n + b\ \sin x_n,\ n = 0,1,2 \ldots$

Ta xét các trường hợp:

i) Nếu a = $k\pi, k \in$ Z thì x_n = a, $\forall n, \in$ N , tức là dãy này có giới hạn.

ii) Nếu a $\neq k\ \pi, k \in$ Z.

Xét hàm số f(x) = x + sinx, $x \in$R thì x_{k+1} = f(x_n). n= 0,1,2,... và $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$ nên hàm này đồng biến và dãy đã cho đơn điệu.

Ta có 2 khả năng:

+) Nếu $a \in (2k\pi; (2k+1)\pi)$, $k \in$ Z

Khi đó, sin a> 0 và suy ra dãy này đơn điệu tăng

Bằng quy nạp theo n, ta chứng minh được rằng $x_n \in (2k\pi; (2k+1)\pi)$, $\forall n$.

Suy ra dãy này tăng và bị chặn trên nên có giới hạn, đặt đó là l thì chuyển qua giới hạn, ta có: $2k\pi < a \le l \le (2k\pi + 1)\pi, \sin l = 0$

Do đó: $l = (2k\pi + 1)\pi$,

+ Nếu $a \in (2k\pi; (2k-1)\pi)$, $k \in Z$.

Khi đó, sin a< 0 và suy ra dãy này đơn điệu giảm.

Chứng minh tương tự phần trên, dãy này giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn. Ta tính được giới hạn đó chính là $(2k\pi - 1)\pi$,

Suy ra, với b = 1 thì dãy đã cho luôn có giới hạn và giới hạn đó được xác định với công thức:

$$\lim x_n = \left(2\left[\frac{a}{2\pi}\right] + sign\left\{\frac{a}{2\pi}\right\}\right)\pi$$

Với [x], {x}, sign (x) lần lượt là hàm phần nguyên, hàm phân lẻ và hàm dấu của x.

b) Xét hàm số g(x) = $\frac{\sin x}{x}; x \in (0;\pi]$. Ta thấy đây là hàm liên tục và g(x) = 0;

Mà: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ và từ điều kiện $0 < \frac{2}{b} < 1$ ta có b> 2

Khi đó tồn tại $a_0 \in (0;\pi)$ sao cho: $2a_0 = b \sin a_0$

Dễ thấy rằng, khi đó dãy (x_n) tuần hoàn với chu kỳ là 2 nên không có giới hạn hữu hạn. Ta có đpcm.

*) Ý a) của bài toán có thể tổng quát hơn thành:

Cho a và b là các số thực thỏa mãn: $a^2 + b^2 \le 1$. Dãy số (x_n) xác định bởi:

$x_0 \in R; x_{n+1} = x_n + a\sin x_n + b\cos x_n$

Chứng minh dãy số có giới hạn.

<u>Bài 6:</u> Cho số thực dương m,dãy số (x_n) xác định bởi :

$$x_1 \ge 0 \; ; \quad x_{n+1} = x_n + m - \frac{x_n}{\sqrt{1 + x_n^2}} \quad (1)$$

a. Tìm m để (x_n) có giới hạn hữu hạn với mọi $x_1 \ge 0$

b. Giả sử $\lim x_n = a \ne x_1$. Tính $\lim \frac{x_{n+1} - a}{x_n - a}$ theo m.

Lời giải:

a. Giả sử dãy hội tụ (1) chuyển qua giới hạn có phương trình:

$$x = x + m - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow m = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (2) \text{ với } x > 0$$

Xét bảng biến thiên của hàm số $y= \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ với $x > 0 \Rightarrow m \in (0; 1)$

*) Ngược lại, với $m \in (0; 1)$ ta chứng minh (x_n) có giới hạn với mọi $x_1 \geq 0$

Khi đó, (2) $\Leftrightarrow x = \dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}} = a$

Xét $f(x) = x+ m - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} > 0$ với mọi $x > 0$

Khi đó ta có:

+) Nếu $x_1 \in (0; a)$: Ta quy nạp được: $x_n \in (0; a)$ và dãy số tăng nên tồn tại giới hạn $\Rightarrow \lim x_n = a$

+) Nếu $x_1 = a \Rightarrow x_n = a \Rightarrow \lim x_n = a$

+) Nếu $x_1 \in (a; +\infty)$: Ta quy nạp được: $x_n \in (a; +\infty)$ và dãy số giảm nên tồn tại giới hạn $\Rightarrow \lim x_n = a$.

b. Theo định lý Lagrange ta có:

$$\lim \frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} = \lim \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \lim_{y_n \to a} f'(y_n) = f'(a) = 1 - \sqrt{(1-m^2)^3}$$

**)Nếu $u_n \in D$ (với D là một khoảng,nửa khoảng, đoạn) với mọi số nguyên dương n và hàm y=f(x) nghịch biến trên D. Khi đó, các dãy số (u_{2n}) và (u_{2n+1}) là hai dãy số đơn điệu ngược chiều .*

<u>Bài 7:</u> Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 \in (0;1) \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 4u_n + 1}{u_n^2 + u_n + 1}; n \geq 1 \end{cases}$

Chứng minh dãy số (u_n)có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Lời giải:

*) Ta thấy $u_n > 0, \forall n$

*) $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 4u_n + 1}{u_n^2 + u_n + 1} = 1 + \dfrac{3u_n}{u_n^2 + u_n + 1} = 2 - \dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n^2 + u_n + 1}$ ta có $1 < u_n < 2 \ \forall n$

*) Xét hàm số: $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}\ x\in(1;2)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3(1-x^2)}{x^2+x+1}<0$

Vậy, f(x) nghịch biến trên (1;2)

Dãy số đã cho có thể viết dưới dạng: $\begin{cases}u_1\in(0;1)\\ u_{n+1}=f(u_n),n=1,2,3...\end{cases}$

*) Ta thấy $u_1<u_3\Rightarrow f(u_1)<f(u_3)\Rightarrow u_2<u_4\Rightarrow f(u_2)<f(u_4)\Rightarrow\ u_3<u_5$

Ta quy nạp được với mọi n nguyên dương: $u_{2n-1}<u_{2n+1}$

$\Rightarrow$ Dãy (u_{2n+1}) tăng và bị chặn trên bởi 2 nên có giới hạn, giả sử là $\alpha\in[1;2]$

Tương tự ,ta có :

dãy $(u_{2n}$) giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên có giới hạn, giả sử là $\beta\in[1;2]$

Ta có: $\begin{cases}u_{2n+1}=f(u_{2n})\\ u_{2n}=f(u_{2n+1})\end{cases}$.

Chuyển qua giới hạn, ta có $\begin{cases}\alpha=f(\beta)\\ \beta=f(\alpha)\end{cases}$

$$\Rightarrow\alpha-\beta=f(\beta)-f(\alpha)\Leftrightarrow\alpha-\beta=\frac{\beta^2+4\beta+1}{\beta^2+\beta+1}-\frac{\alpha^2+4\alpha+1}{\alpha^2+\alpha+1}$$

$$\Leftrightarrow\alpha-\beta=3\left(\frac{\beta}{\beta^2+\beta+1}-\frac{\alpha}{\alpha^2+\alpha+1}\right)\Leftrightarrow\alpha-\beta=\frac{3(\alpha-\beta)(\alpha\beta-1)}{(\beta^2+\beta+1)(\alpha^2+\alpha+1)}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha-\beta=0\\ 3(\alpha\beta-1)=\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\ (\beta^2+\beta+1)\ \ (*)\end{array}\right.$$

Ta thấy phương trình (*) với $\alpha,\beta\in[1;2]$ chỉ thỏa mãn khi : $\alpha=\beta=1$

Khi đó thay vào hệ ta được mâu thuẫn.

Vậy, ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}=t$, hai dãy con đó có cùng giới hạn là t∈[1 ;2]

*) Ta thấy, t phải thỏa mãn phương trình: $t=\dfrac{t^2+4t+1}{t^2+t+1}\ \Leftrightarrow t^3-3t=1$ (*)

Đặt $t=2\cos\varphi$,do t∈[1 ;2] nên $\varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$, thay vào phương trình (*):

$8\cos^3\varphi-6\cos\varphi=1\Leftrightarrow\cos3\varphi=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\varphi=\pm\dfrac{\pi}{9}+k\dfrac{2\pi}{3}$.

Do $\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ nên $\varphi = \frac{\pi}{9}$, vậy $t = 2\cos\frac{\pi}{9} \in [1;2]$ thỏa mãn phương trình.

Vậy dãy số u_n có giới hạn hữu hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\cos\frac{\pi}{9}$

Bài 8: (VMO 2005, bảng A)

Xét dãy số thực (x_n) được xác định bởi công thức $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = 3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n \end{cases}$

Hãy tìm tất cả các giá trị của a sao cho dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn của dãy số tương ứng trong các trường hợp đó.

Lời giải:

*) Xét hàm số: $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x\ , x \in R$

Dãy số đã cho chính là $x_n = a; x_n = f(x); n = 1, 2, 3...$

Ta có $f'(x) = 9x^2 - 14x + 5 = (9x - 5)(x - 1)$. Ta có : f(x) đồng biến trên các khoảng $(-\infty;5/9)$ và $(1;+\infty)$; nghịch biến trên $(5/9;1)$

*) Ta cũng có $f(x) - x = x(x - 1)(4x - 3)$

nên $f(x) = x$ có 3 nghiệm là : $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{4}{3}$

- Với $x \in (-\infty;0)$ thì ta luôn có $f(x) \in (-\infty;0)$
- Với $x \in \left(0;\frac{4}{3}\right)$ thì ta luôn có $f(x) \in \left(0;\frac{4}{3}\right)$
- Với $x \in \left(\frac{4}{3};+\infty\right)$ thì ta luôn có $f(x) \in \left(\frac{4}{3};+\infty\right)$

Ta xét các trường hợp sau:

1) Nếu $a < 0$ thì $x_n < 0$ với mọi $n \geq 1$. Ta có $x_2 = f(x_1) < x_1$ và hàm f(x) đồng biến trên miền này nên dãy đã cho đơn điệu giảm, tức là nếu dãy này hội tụ và l thì $l<0$, không thể là nghiệm của phương trình f(x) = x đã nêu nên trong trường hợp này, dãy không hội tụ.

2) Nếu $a > \frac{4}{3}$ thì $x_n > \frac{4}{3}$; $\forall n$. Ta có $x_2 = f(x_1) > x_1$ và f(x) đồng biến trên miền này nên dãy đã cho đơn điệu tăng, tức là nếu dãy này hội tụ về l thì $l > \frac{4}{3}$, cũng không thể là nghiệm của phương trình f(x) = x đã nêu nên trong trường hợp này, dãy không hội tụ.

3) Nếu $a = 0$ thì $x_n = 0$ $\forall n$ nên thỏa mãn đề bài.

4) Nếu $a = \frac{4}{3}$ thì $x_n = \frac{4}{3}\ \forall n$ nên thỏa mãn đề bài.

5) Nếu $0 < a < \frac{4}{3}$ thì suy ra $x_n \in \left(0;\frac{4}{3}\right)$. Ta có hai trường hợp sau:

i) Nếu $a \in \left[1;\frac{4}{3}\right)$ thì ta có:

$$f(a) - 1 = 3a^3 - 7a^2 + 5a - 1 = (a-1)^2(3a-1) \geq 0.$$

$$f(a) - \frac{4}{3} = 3a^3 - 7a^2 + 5a - \frac{4}{3} = (a - \frac{4}{3})^2(3x^2 - 3x + 1) < 0$$

Do đó, bằng quy nạp ta chứng minh được $\forall n \in N$; $x_n \in \left[1;\frac{4}{3}\right)$

Hàm số f(x) trên miền này đồng biến và $f(a) - a = 3a^3 - 7a^2 + 4a = (a-1)(3a-1) < 0$ nên dãy số này giảm và bị chặn dưới. Do đó, dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn. Dễ thấy rằng giới hạn đó phải thuộc tập nghiệm của phương trình $f(x) = x$ và thuộc miền $\left[1;\frac{4}{3}\right)$, suy ra giới hạn là 1.

ii) Nếu $a \in (0;1)$ thì có hai trường hợp xảy ra:

* Nếu $\forall n \in N$ mà $x_n \in (0;1)$ thì $f(x) > x\ \forall\ x \in (0;1)$ nên với n tùy ý thì $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$, tức là dãy này đơn điệu tăng. Hơn nữa, nó bị chặn trên có giới hạn. Lập luận tương tự trên, giới hạn đó cũng chính là 1.

* Nếu như tồn tại một số số hạng của dãy thuộc miền $x_n \in \left(0;\frac{4}{3}\right)$ nhưng không thuộc (0;1) thì gọi m là chỉ số nhỏ nhất sao cho $x_m \notin (0;1)$, rõ ràng $m > 1$ vì $a = x_1 \in (0;1)$. Khi đó, ta có $x_{m-1} \in (0;1)$ Dựa vào bảng biến thiên của f(x) ta có:

$$x_m \in \left(0;\frac{275}{243}\right) \text{ và } x_m \notin (0;1) \text{ nên } x_m \in \left(1;\frac{275}{243}\right) \subset \left(1;\frac{4}{3}\right).$$

Khi đó: với mọi $n \geq m$ thì tất cả các số hạng của dãy đều thuộc $\left(1;\frac{4}{3}\right)$ và trường hợp này đã được xét ở phần trên.

Giới hạn của dãy số trong trường hợp này vẫn là 1

Tóm lại, dãy đã cho hội tụ khi và chỉ khi $a \in \left[0;\frac{4}{3}\right]$, cụ thể là:

+) Với $a = 0$ thì $\lim x_n = 0$.

+) Với $a = \frac{4}{3}$ thì $\lim x_n = \frac{4}{3}$

+) Với $0 < a < \frac{4}{3}$ thì $\lim x_n = 1$.

+) Với $a < 0$ hoặc $a > \frac{4}{3}$:dãy số không hội tụ.

<u>Bài 9</u> (Việt Nam TST 1996)

Hãy tìm tất cả các số thực a để dãy số sau có giới hạn hữu hạn:

$$x_0 > 1;\ x_{n+1} = \frac{a}{1+x_n^2},\ n = 0,1,2\ldots$$

Lời Giải:

Ta xét các trường hợp sau:

1) Nếu $a = 0$: hiển nhiên $x_n = 0$; $\forall n > 0$ nên dãy đã cho hội tụ.

2) Nếu $a > 0$:

Kí hiệu $f(x) = \frac{a}{1+x_n^2}$ và $g(x) = f(f(x))$

Ta có : $f'(x) = -\frac{2ax}{(1+x_n^2)^2} < 0$ nên f(x) là hàm nghịch biến trên $(0;+\infty)$

và hàm g(x) đồng biến trên $(0;+\infty)$

*) Xét dãy $\{x_{2n}\}$: Đặt $u_n = x_{2n}$; n=0,1,2... thì $u_{n+1} = g(u_n)$.

Do g(x) đồng biến nên $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu .

Mặt khác, dễ thấy rằng $0 < u_n < a$ nên dãy này bị chặn.

Vậy, luôn tồn tại giới hạn $\lim u_n = \lim x_{2n} = b$;với $b \in [0;1]$ là nghiệm của phương trình $g(x) = x$.

*) Tương tự ta có : dãy $\{x_{2n+1}\}$ cũng có giới hạn c với $c \in [0;1]$ là nghiệm của phương trình $g(x) = x$.

Mặt khác: $g(x) - x = \frac{(1+x^2)^2(a-x) - a^2x}{a^2+(1+x^2)^2} = \frac{-(x^3+x-a)(x^2-ax+1)}{a^2+(1+x^2)^2}$

a) <u>Trường hợp 1:</u> nếu $0 < a \le 2$:

Chuyển qua giới hạn hai vế của công thức truy hồi ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a = b + bc^2 \\ a = c + cb^2 \end{cases}$$

Trừ tương ứng hai vế của các đẳng thức trên, ta được: $(b - c)(bc-1)=0$

Nếu $b \neq c$ thì $bc = 1$, suy ra $b+c = a$, tức là b, c là nghiệm của phương trình

$x^2 - ax + 1 = 0$

Vì a$\leq$ 2 nên hoặc là phương trình này vô nghiệm, hoặc là với a = 2 thì nó có nghiệm b = c = 1, trái với điều giả sử. Do đó, b =c

Hơn nữa: Với b=c. Thay vào hệ ta có: $b^3 + b - a = 0$

Xét: $f(x) = x^3 + x - a$ là hàm số đồng biến trên R và f(0).f(1)= -a(2-a) ≤ 0

Nên f(x) = 0 có nghiệm duy nhất b$\in$(0 ;1]

Do đó, trong trường hợp này, ta có: hay $\lim x_{2n+1} = \lim x_{2n} = b$

Hay giới hạn của dãy $\{x_n\}$ tồn tại và là nghiệm của phương trình: $x^3 + x - a = 0$.

b) <u>Trường hợp 1:</u> a> 2

*) Nếu a $= x_0^3 + x_0$ thì $x_1 = \dfrac{a}{1+x_0^2} = \dfrac{x_0 + x_0^3}{1+x_0^2} = x_0$.

Tương tự, ta chứng minh được dãy số đã cho là dãy hằng nên nó có giới hạn.

*) Giả sử a$\neq x_0^3 + x_0$ và tồn tại giới hạn $\lim x_n = k > 0$

Chuyển qua giới hạn, ta có: f(k)= k hay $a = k + k^3$. Do đó, k chính là nghiệm duy nhất của phương trình :$f(x)= x^3 + x - a=0$.

Lại có:

$$g(x) - x = \frac{(1+x^2)^2(a-x) - a^2x}{a^2 + (1+x^2)^2} = \frac{-(x^3+x-a)(x^2-ax+1)}{a^2+(1+x^2)^2}$$

Vì a> 2 nên phương trình $h(x) = x^2 - ax + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $\alpha < \beta$.

Ta có f(1) =2-a < 0= f(k) nên k > 1,

do đó: $h(k) = k^2 - ak + 1 = 1 - k^4 < 0$ (vì $a = k + k^3$) $\Rightarrow \alpha < k < \beta$

*) Dấu của g(x) – x chính là dấu của $-(x-k)(x-\alpha)(x-\beta)$. Từ bảng xết dấu của biểu thức này, ta được: Nếu xét dãy $u_n = x_{2n}$ tương tự ở trên thì nó đơn điệu và $\lim u_n = k$ nên tồn tại n= n_0 sao cho $\alpha < u_{n0} < \beta$. Nếu $\alpha < u_{n0} < k$ thì $u_{no+1} = g(u_{no}) < u_{no}$ suy ra { u_{no} } là dãy giảm kể từ u_{no} và $u_{no} < k$ nên không thể có lim $u_{no} = k$. Tương tự nếu $k < u_{no} < \beta$. Suy ra chỉ có thể là $u_{no} = k$.

Ta cũng có, nếu $\exists$ i: $x_i = k$; i$\geq$ 1 $\Rightarrow x_{i-1} = k$ vì

$$x_i = \frac{a}{1+x_{i-1}^2} = k \Rightarrow k(1+x_{i+1}^2) = a = k + k^3 \Leftrightarrow x_{i+1}^2 = k^2 \Leftrightarrow x_{i-1} = k$$

Suy ra, nếu $u_{no} = k$ thì x_0=k mà $a = k + k^3$ nên $a = x_0 + x_0^3$, mâu thẫn với điều giả sử.

Vậy, với a > 2 dãy số đã cho có gới hạn khi và chỉ khi $a = x_0 + x_0^3$

3) Nếu a < 0 đặt $x_n = - y_n \Rightarrow y_{n+1} = \dfrac{a}{1+x_n^2} = \dfrac{a}{1+y_n^2}$ và $y_n > 0$ $\forall n \geq 1$

Do đó, $\{x_n\}$ hội tụ khi và chỉ khi $\{y_n\}$ hội tụ. Tương tự như lập luận ở trên, dãy này có hội tụ khi: $0< -a < 2$ hoặc $-a = y_1(1+y_0^2) = y_1(1+x_0^2) \Leftrightarrow x_0 = y_1 \Leftrightarrow -a = x_0 + x_0^3$,

Vậy dãy đã cho có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $|a| \le 2$ hoặc $|a| = x_0 + x_0^3$

Bài 10: Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \dfrac{2013}{3}\ln\left(x_n^2 + 2013^2\right) - 2013^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn.

Lời giải.

*) Xét hàm số tương ứng $f(x) = \dfrac{2013}{3}\ln\left(x^2 + 2013^2\right) - 2013^2, x \in \mathbb{R}$.

Dãy số đã cho chính là

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = f\left(x_n\right), n = 1,2,3,... \end{cases}$$

Ta có $f'(x) = \dfrac{2013}{3}\dfrac{2x}{x^2+2013^2} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2\cdot 2013x}{x^2+2013^2} \le \dfrac{1}{3}$.

*) Xét hàm số $g(x) = f(x) - x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ nên g(x) là hàm số nghịch biến.

Ta lại có $g(0) = f(0) = \dfrac{2013}{3}\ln 2013^2 - 2013^2 < 0$ và $g(-2013^2) > 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm.

Gọi a là nghiệm của phương trình $g(x) = 0 \Rightarrow f(a) = a$.

*) Áp dụng dụng định lý Lagrange ta có: $f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$, mà $f'(z) \le \dfrac{1}{3}, \forall z$ nên suy ra

$$|f(x) - f(y)| \le \frac{1}{3}|x-y| \text{ với mọi } x, y \text{ thuộc } \mathbb{R}.$$

Ta có : $|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| \le \dfrac{1}{3}|x_n - a| \le ... \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^n |x_1 - a|$.

Dễ thấy rằng $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^n |x_1 - a|\right] = 0$ nên theo nguyên lí kẹp, ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n - a| = 0$.

Vậy dãy đã có giới hạn hữu hạn. Ta có đpcm.

*) *Dãy số :*

$$x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, 3, \dots \text{ và } f(x)$$

là hàm khả vi thỏa mãn $|f(x)| \le q < 1$ *(với q là một số thực dương) thì dãy số hội tụ.*

Một bài toán tương tự trong đề dự bị VMO 2008 là :

Cho số thực a và dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi:

$$x_1 = a, x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) - 2008 \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n tiến đến dương vô cùng.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1 : Cho dãy số (x_n): $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1$ .Tìm x_1 để dãy số có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 : Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n(u_n - 1) \end{cases}$ Tìm a để (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 3 : Cho dãy số xác định bởi công thức $u_1 = \alpha \in (0;1)$, $u_{n+1} = \sqrt[9]{\dfrac{u_n + k}{k.u_n + 1}}$ với $k > 1$,

Chứng minh rằng $\lim u_n = 1$

Bài 4 : Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn: $x_1 = a$; $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3}{3x_n^2 - 1}$

Hãy tìm tất cả các giá trị a sao cho dãy này xác định và có giới hạn hữu hạn.

Bài 5 : Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $4x_{n+1} = \sqrt[3]{64x_n + 15}$.

Chứng minh rằng với mọi số thực x_1, dãy số đã cho luôn có giới hạn hữu hạn.

Ứng dụng định lí phần dư Trung Hoa

Đặng Đình Sơn, THPT Chuyên Lương Văn Tuỵ

1. ĐỊNH LÍ PHẦN DƯ TRUNG HOA

Định lí: Cho n số nguyên dương $m_1, m_2, ..., m_n$ số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau. Khi đó hệ đồng dư tuyến tính

$$\begin{cases} x \equiv a_i \pmod{m_i} \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất mođun $M = m_1 m_2 ... m_n$.

Chứng minh: Đặt $M_i = \dfrac{M}{m_i} \Rightarrow (M_i, m_i) = 1, i = \overline{1,n}$ và $M_i \vdots m_j, \forall i \neq j$.

Suy ra $\forall i = \overline{1,n}$, tồn tại số nguyên y_i thoả mãn $M_i y_i \equiv a_i \pmod{m_i}$.

Xét $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} M_i y_i$ ta có: $\begin{cases} \overline{x} \equiv a_i \pmod{m_i} \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$.

Do đó: $\begin{cases} x \equiv a_i \pmod{m_i} \\ i = \overline{1,n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \overline{x} \pmod{m_i} \\ i = \overline{1,n} \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv \overline{x} \pmod{M}$

Vậy định lí được chứng minh.

Nhận xét: *Định lí phần dư Trung Hoa khẳng định về sự tồn tại duy nhất của một lớp thặng dư các số nguyên thoả mãn đồng thời nhiều đồng dư tuyến tính. Do đó có thể sử dụng định lí để giải quyết những bài toán về sự tồn tại và đếm số các số nguyên thoả mãn một hệ các điều kiện quan hệ đồng dư, chia hết..., hay đếm số nghiệm của phương trình đồng dư. Việc sử dụng hợp lí các bộ $m_1, m_2, ..., m_n$ và bộ $a_1, a_2, ..., a_n$ (trong định lí) cho ta nhiều kết quả rất thú vị và từ đó có thể đưa ra nhiều bài tập hay và khó. Sau đây là một số ứng dụng của định lí phần dư Trung Hoa giải các bài toán số học.*

2. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Bài toán 1. Cho hai số nguyên dương p, q nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho $(pq-1)^n k + 1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n.

Lời giải:

Vì (p,q) = 1 nên theo định lí phần dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên k thoả mãn:

$$\begin{cases} k \equiv 1 \pmod p \\ k \equiv -1 \pmod q \end{cases}$$

Khi đó:

+ Nếu n chẵn thì $(pq-1)^n \equiv 1 \pmod q \Rightarrow (pq-1)^n k \equiv -1 \pmod q \Rightarrow (pq-1)^n k + 1 \vdots q$

+ Nếu n lẻ thì $(pq-1)^n \equiv -1 \pmod p \Rightarrow (pq-1)^n k \equiv -1 \pmod p \Rightarrow (pq-1)^n k + 1 \vdots p$

Vậy $(pq-1)^n k+1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n.

Nhận xét: Chứng minh trên thật gọn gàng nhờ vào việc sử dụng định lí đồng dư Trung Hoa. Mấu chốt của vấn đề ở đây là chúng ta phải thấy rằng để $(pq-1)^n k+1$ là hợp số ta cần chỉ ra $(pq-1)^n k+1$ chia hết cho p hoặc q, khi phân tích tính chẵn lẻ của n ta dễ dàng thấy được sự xuất hiện của hệ $\begin{cases} k \equiv 1 \pmod p \\ k \equiv -1 \pmod q \end{cases}$.

Bài toán 2. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho $2^n k+1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n.

Lời giải:

Nhận xét: Bài tập này gần giống với bài tập số một nhưng nó phức tạp hơn bài toán 1 nhiều vì trong bài toán này ta không thể nhìn thấy ngay để $2^n k+1$ là hợp số ta cần chỉ ra nó chia hết cho số nào.

Để ý thấy rằng trong bài toán 1 ta xét hai trường hợp n chẵn và n lẻ hay tổng quát là xét n ở dạng sau $2^m l$ với m, l là các số tự nhiên, l lẻ.

Khi đó $2^n k+1 = 2^{2^m l} k+1$ và ta có $2^{2^m l} \equiv -1 \bmod (2^{2^m}+1)$, do đó để $2^n k+1$ là hợp số ta chỉ ra $2^n k+1$ chia hết cho $F_m = 2^{2^m}+1$ (Dãy Fermat).

Ta trình bày lời giải bài toán này như sau:

Trước hết ta có F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 là các số nguyên tố, $F_5 = 641.6700417$ và $(F_i, F_j) = 1, \forall i \neq j$.

Theo định lí phần dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên dương k thoả mãn:

$$\begin{cases} k \equiv 1 \pmod{F_m} \\ m = 0,1,2,3,4 \\ k \equiv 1 \pmod p \\ k \equiv -1 \pmod q \end{cases} \text{(p = 641, q = 6700417, (p,q)=1).}$$

Ta có $n = 2^m l$, với m, l là các số tự nhiên, l lẻ.

+ Nếu m < 5 thì $2^n = 2^{2^m l} \equiv -1 \pmod{F_m} \Rightarrow 2^n k \equiv -1 \pmod{F_m} \Rightarrow 2^n k+1 \vdots F_m$

+ Nếu m = 5 thì $2^n = 2^{2^m l} \equiv -1 (\bmod F_5) \Rightarrow 2^n k \equiv -1 (\bmod p) \Rightarrow 2^n k + 1 \vdots p$

+ Nếu m > 5 thì $2^n = (2^{2^5})^{2^{m-5} l} \equiv 1 (\bmod F_5) \Rightarrow 2^n k \equiv -1 (\bmod q) \Rightarrow 2^n k + 1 \vdots q$

Do đó $2^n k + 1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 3. Cho là tập $S = \{p_1, p_2, ... p_k\}$ gồm k số nguyên tố phân biệt, và $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên sao cho với mọi số nguyên dương n đều tồn tại p_i trong S sao cho $p_i \mid f(n)$. Chứng minh rằng tồn tại i sao cho $p_i \mid f(n), \forall n \in N^*$.

Lời giải:

Giả sử không tồn tại i sao cho $p_i \mid f(n), \forall n \in N^*$, suy ra với mọi $i = \overline{1;k}$ luôn tồn tại a_i sao cho $p_i \nmid f(a_i)$. Mặt khác theo định lí Phần dư Trung Hoa tồn tại số tự nhiên x thỏa mãn $\begin{cases} x \equiv a_i (\bmod p_i) \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$, do đó $\begin{cases} f(x) \equiv f(a_i) (\bmod p_i) \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$ hay $p_i \nmid f(x), \forall i = \overline{1;k}$ (Mâu thuẫn)

Bài toán 4. Cho $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ và $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Khi đó phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 (\bmod n)$ có nghiệm khi và chỉ khi tất cả các phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i})$, $i = \overline{1; k}$ có nghiệm. Nếu gọi là số nghiệm của phương trình $f(x) \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i})$ là $n_i, i = \overline{1;k}$ thì phương trình $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ có đúng $n_1.n_2...n_k$ nghiệm (môđun n)

Lời giải:

- Giả sử $\overline{x}$ là một nghiệm của $f(x) \equiv 0 (\bmod n)$, hiển nhiên $\overline{x}$ là một nghiệm của hệ $\begin{cases} f(x) \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i}) \\ i = \overline{1;k} \end{cases}$

- Giả sử $\overline{x_i}$ là một nghiệm của $f(x) \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i}), i = \overline{1;k}$. Theo định lí Phần dư Trung Hoa tồn tại duy nhất $\overline{x}$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x \equiv \overline{x_i} (\bmod p_i^{\alpha_i}) \\ i = \overline{1;k} \end{cases}$ (mod n). Mà $\overline{x} \equiv \overline{x_i} (\bmod p_i^{\alpha_i}) \Rightarrow f(\overline{x}) \equiv f(\overline{x_i}) (\bmod p_i^{\alpha_i})$ (vì $(f(\overline{x}) - f(\overline{x_i})) \vdots (\overline{x} - \overline{x_i})$), suy ra $\overline{x}$ là một nghiệm của $f(x) \equiv 0 (\bmod n)$.

Mỗi bộ $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_k})$ với $\overline{x_i}$ là một nghiệm của $f(x) \equiv 0(\bmod p_i^{\alpha_i}), i = \overline{1;k}$ cho ta một nghiệm của $f(x) \equiv 0(\bmod n)$ và hiển nhiên các nghiệm này là phân biệt (vì trong hai bộ khác nhau phải tồn tại ít nhất một cặp $\overline{x_{i_1}}, \overline{x_{i_2}}$ là hai nghiệm khác nhau của $f(x) \equiv 0(\bmod p_i^{\alpha_i})$, do đó hai nghiệm tương ứng với hai bộ đó không đồng dư theo mod $p_i^{\alpha_i}$). Do đó số nghiệm của $f(x) \equiv 0$ đúng bằng $n_1.n_2\ldots n_k$.

Như vậy dựa vào định lí Phần dư Trung Hoa ta có thể đếm được số nghiệm của một phương trình đồng dư. Bài toán 5, bài toán 6 sau đây là các ví dụ cụ thể cho bài toán 4.

Bài toán 5. Cho số nguyên dương $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau. Tìm số nghiệm của phương trình đồng dư $x^2 + x \equiv 0(\bmod n)$.

Lời giải:

$$x^2 + x \equiv 0(\bmod n) \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) \equiv 0(\bmod p_i^{\alpha_i}) \\ i = \overline{1,k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \equiv 0(\bmod p_i^{\alpha_i}) \\ x \equiv -1(\bmod p_i^{\alpha_i}) \end{array}\right. \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$$

Theo định lí phần dư Trung Hoa mỗi hệ phương trình $\begin{cases} x \equiv a_i(\bmod p_i^{\alpha_i}) \\ a_i \in \{-1;0\} \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$ có duy nhất một nghiệm (thặng dư modn) và ta có 2^k hệ (bằng số bộ $(a_1, a_2, ..., a_k), a_i \in \{-1;0\}$), nghiệm của các hệ khác nhau. Suy ra phương trình $x^2 + x \equiv 0(\bmod n)$ có đúng 2^k nghiệm.

Bài toán 6. Cho số nguyên dương $a = p_1 p_1 ... p_k$; trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau và số nguyên dương n thoả mãn k < n < $p_1, p_2, ..., p_k$. Chứng minh rằng trong dãy sau có n^k số chia hết cho a.

$$u_1 = 1.2...n, u_2 = 2.3...(n+1), u_3 = 3.4...(n+2), ..., u_a = a(a+1)...(a+n-1)$$

Lời giải:

Nhận xét: Bài tập này tư tưởng giống như bài 4.

$$u_j \vdots a \Leftrightarrow \begin{cases} i \equiv a_i(\bmod p_i) \\ a_i \in \{0, -1, -2, ..., -(n-1)\}, \quad j = \overline{1,a}. \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$$ Do đó ta có n^k số chia hết cho a.

- **** Cùng với tư tưởng như bài 4, ta có thể chứng minh công thức của Phi hàm Ơl bằng cách đưa về đếm số nghiệm của một hệ đồng dư.***

Bài toán 7. Cho số nguyên dương n, $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n. Chứng minh rằng với $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau, ta có :

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_k})$$

(Phi hàm Ơle)

Lời giải

Nhận xét: Công thức trên đã được chứng minh bằng cách sử dụng tính chất $\varphi(n)$ là hàm nhân tính. Và để chứng minh tính chất trên ta phải sử dụng đến các tính chất của hệ thặng dư. Cách này khá phức tạp.

Bài toán này có thể giải đẹp hơn bằng định lí đồng dư Trung Hoa

$A_n = \{a \in N \mid 1 \le a \le n, (a, n) = 1\}$

Khi $n = p^\alpha \Rightarrow \varphi(n) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$

Khi $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau. Với số nguyên dương a thoả mãn $1 \le a \le n$ ta có:

$$a \in A_n \Leftrightarrow (a, p_i^{\alpha_i}) = 1, i = \overline{1, k} \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv a_i (\text{mod } p_i^{\alpha_i}) \\ a_i \in A_{p^{\alpha_i}} \\ i = \overline{1, k} \end{cases}$$

Mà theo định lí phần dư Trung Hoa, tồn tại duy nhất số nguyên dương a, $1 \le a \le n$ thoả mãn $\Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv a_i (\text{mod } p_i^{\alpha_i}) \\ a_i \in A_{p^{\alpha_i}} \\ i = \overline{1, k} \end{cases}$ và ta có $\prod_{i=1}^{k} | A_{p_i^{\alpha_i}} | = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1})$ hệ dạng trên, nghiệm của các hệ khác nhau.

Do đó $| A_n | = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_k})$.

Bài toán 8. Cho $A_n = \{a \in N \mid 1 \le a \le n, (a, n) = (a+1, n) = 1\}$. Tìm $| A_n |$.

Nhận xét: Bài toán này có thể giải tương tự như cách chứng minh công thức phi hàm Ơle $\varphi(n)$. Giả sử $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau, ta có $| A_n | = n(1 - \frac{2}{p_1})(1 - \frac{2}{p_2})...(1 - \frac{2}{p_k})$.

** Sử dụng định lí đồng dư Trung Hoa chứng minh công thức của Phi hàm Ole, cho ta một lời giải đẹp, nhưng cũng với tư tưởng trên và tính chất của hệ thặng dư ta còn có thể giải bài toán mở rộng của định lí Wilson.*

Bài toán 9. Tìm số nguyên dương n lẻ sao cho với mọi hệ thặng dư thu gọn modun n $\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}$ ta có $a_1a_2...a_{\varphi(n)} \equiv -1(\text{mod}\, n)$.

Lời giải:

- Theo định lí Wilson ta suy ra n nguyên tố thoả mãn.
- Với $n = p^m$ với p là số nguyên tố lẻ.

Ta có $\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}$ là một hệ thặng dư thu gọn modun n, suy ra với mỗi $a\in\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}$ đều tồn tại duy nhất $\overline{a}\in\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}$ thoả mãn $a\overline{a}\equiv 1(\text{mod}\, n)$ và $a\neq b \Rightarrow \overline{a}\neq\overline{b}$.

$$a=\overline{a} \Leftrightarrow a^2-1 \vdots n \Leftrightarrow (a-1)(a+1)\vdots n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\equiv 1(\text{mod}\, n)\\ a\equiv -1(\text{mod}\, n)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1\\ a=n-1\end{array}\right. \text{(vì (a-1,a+1)<3).}$$

Suy ra $\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}\backslash\{1, n-1\}$ chia thành $\dfrac{\varphi(n)-1}{2}$ cặp nghịch đảo modun n.

Do đó $a_1a_2...a_{\varphi(n)} \equiv -1(\text{mod}\, n)$.

- Với $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ trong đó $p_1,p_2,...,p_k$ là k (k>1) số nguyên tố lẻ, phân biệt.

Tương tự như trên: Với mỗi $a\in\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}$ đều tồn tại duy nhất $\overline{a}\in\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}$ thoả mãn $a\overline{a}\equiv 1(\text{mod}\, n)$ và $a\neq b \Rightarrow \overline{a}\neq\overline{b}$.

$$a=\overline{a} \Leftrightarrow a^2-1 \vdots n \Leftrightarrow (a-1)(a+1)\vdots n \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a\equiv 1(\text{mod}\, p_i^{\alpha_i})\\ a\equiv -1(\text{mod}\, p_i^{\alpha_i}) \text{ (Vì (a-1,a+1)<3)}\end{array}\right.\\ i=\overline{1,k}\end{array}\right.$$

Theo định lí phần dư Trung Hoa mỗi hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l} a\equiv a_i(\text{mod}\, p_i^{\alpha_i})\\ a_i\in\{-1;1\}\\ i=\overline{1,k}\end{array}\right.$ có duy nhất một nghiệm (thặng dư modn) và ta có 2^k hệ (bằng số bộ $(a_1,a_2,...,a_k)$, $a_i\in\{-1;0\}$), nghiệm của các hệ khác nhau.

Suy ra có đúng 2^k số $a \in \{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}\}$ mà $a = \overline{a}$, Kí hiệu A_n là tập hợp $a \in \{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}\}$ mà $a = \overline{a}$.

Dễ thấy $\prod_{a \in A_n} a \equiv (-1)^{2^{k-1}} \equiv 1 (\bmod p_i^{\alpha_i}), i = \overline{1, k} \Rightarrow \prod_{a \in A_n} a \equiv 1 (\bmod n)$

Mặt khác tập $\{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}\} \setminus A_n$ chia thành $\dfrac{\varphi(n) - 2^k}{2}$ cặp nghịch đảo mođun n

Suy ra: $a_1 a_2 ... a_{\varphi(n)} \equiv 1 (\bmod n)$.

Kết luận: $n = p^m$.

Sau đây là một số bài toán chứng minh sự tồn tại của một dãy số thỏa mãn một số tính chất cho trước bằng các kỹ thuật lựa chọn bộ $a_1, a_2, ..., a_n$ ***(trong định lí phần dư Trung Hoa).***

Bài toán 10. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, luôn tồn tại n số tự nhiên liên tiếp sao cho bất kì số nào trong các số đó cũng đều là hợp số.

Nhận xét: n số tự nhiên liên tiếp có dạng a+1, a+2,...,a+n. Các số này là hợp số nếu tồn tại các số nguyên dương $p_1, p_2, ..., p_n$ khác 1 sao cho $(a + i) \vdots p_i^2$. Suy ra a là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x \equiv -i (\bmod p_i^2) \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$.

Theo định lí đồng dư Trung Hoa hệ $\begin{cases} x \equiv -i (\bmod p_i^2) \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$ có nghiệm khi $p_1, p_2, ..., p_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

Do đó ta chỉ cần chọn $p_1, p_2, ..., p_n$ là n số nguyên tố phân biệt.

Bài toán 11. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, luôn tồn tại n số tự nhiên liên tiếp sao cho bất kì số nào trong các số đó cũng đều không phải là luỹ thừa (với số mũ nguyên lớn hơn 1) của một số nguyên tố.

(Đề thi toán quốc tế 1989)

Nhận xét: Khi giải bài toán này chúng ta đặt ra câu hỏi bài toán này có tư tưởng có giống bài 5 không?. Nếu để ý đến bổ đề sau đây chúng ta sẽ thấy bài toán này có liên quan đến bài toán trên.

Bổ đề: Nếu a chia hết cho p và không chia hết cho p^2 với p là một số nguyên tố thì a không là luỹ thừa (với số mũ nguyên lớn hơn 1) của một số nguyên tố.

Trở lại bài toán:

Gọi $p_1, p_2, ..., p_n$ là n số nguyên tố phân biệt, theo định lí phần dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên dương a sao cho $\begin{cases} a \equiv -i + p_i (\bmod p_i^2) \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$.

Khi đó $a + i \vdots p_i$, và không chia hết cho $p_i^2, i = \overline{1, n}$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 12. Tồn tại hay không dãy vô hạn $\{x_n\}$ là một hoán vị của tập N sao cho với mọi số tự nhiên k luôn có $x_1 + x_2 + ... + x_k \vdots k$.

(Nordic 1998)

Nhận xét: trong bài toán này ta cần chú ý đến giả thiết dãy $\{x_n\}$ là một hoán vị của tập N, nếu không có giả thiết này bài toán trở nên qua dễ, ta quy nạp như sau, mỗi bộ $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ ta luôn chọn được x_n sao cho $x_1 + x_2 + ... + x_n \vdots n$. Do vậy yêu cầu của bài toán là ta phải xây dựng dãy $\{x_n\}$ sao cho quét hết tập N, đây là câu hỏi chính cần trả lời.

Trở lại bài toán ta chứng minh sự tồn tại dãy số bằng quy nạp như sau:

Chọn $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Giả sử tồn tại $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn $x_1 + x_2 + ... + x_k \vdots k, \forall k = \overline{1, n}$.

Đặt $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Chọn $x_{n+2} = \min(N \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\})$ và x_{n+1} là nghiệm nguyên dương lớn hơn $x_1, x_2, ..., x_n$ của hệ

$$\begin{cases} x \equiv -S_n (\bmod (n+1)) \\ x \equiv -S_n - x_{n+2} (\bmod (n+2)) \end{cases}.$$

Do (n+1,n+2)=1 nên hệ trên có nghiệm (Định lí đồng dư Trung Hoa).

Vì chọn $x_{n+2} = \min(N \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\})$ nên $\{x_n\}$ quét hết tập N.

Bài toán 13. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n, tồn tại một cấp số cộng gồm n số hạng sao cho mọi số hạng của nó đều là luỹ thừa của một số tự nhiên với số mũ lớn hơn 1.

Nhận xét: Trong các cấp số cộng thì cấp số cộng dạng a, 2a, 3a,…,na là thích hợp nhất trong bài toán này vì trong mỗi số hạng không có phép cộng dễ sử lí để phù hợp hơn yêu cầu mọi số hạng của nó đều là luỹ thừa của một số tự nhiên với số mũ lớn hơn 1. Do đó a có dạng $2^{m_2} 3^{m_3} ... n^{m_n}$ và $(m_2, m_3, ..., m_n), (m_2 + 1, m_3, ..., m_n), (m_2, m_3 + 1, ..., m_n), ..., (m_2, m_3, ..., m_n + 1) > 1$.

Lời giải bài toán trình bày như sau:

Giả sử $p_1, p_2, ..., p_n$ là n số nguyên tố phân biệt.

Theo định lí phần dư Trung Hoa, với mọi $i = \overline{2,n}$ tồn tại số nguyên dương m_i thoả mãn

$$\begin{cases} m_i \equiv -1 \pmod{p_i} \\ m_i \equiv 0 \pmod{p_j} \\ j = \overline{1,n},\ j \neq i \end{cases}.$$

Khi đó $(m_2, m_3, ..., m_n) \vdots p_1$, $(m_2+1, m_3, ..., m_n) \vdots p_2, ..., (m_2, m_3, ..., m_n+1) \vdots p_n$.

$$\Rightarrow a = 2^{m_2}3^{m_3}...n^{m_n} = \left(2^{\frac{m_2}{p_1}}3^{\frac{m_3}{p_1}}...n^{\frac{m_n}{p_1}}\right)^{p_1},\ 2a = 2^{m_2+1}3^{m_3}...n^{m_n} = \left(2^{\frac{m_2+1}{p_2}}3^{\frac{m_3}{p_2}}...n^{\frac{m_n}{p_2}}\right)^{p_2}, ...,$$

$$na = 2^{m_2}3^{m_3}...n^{m_n+1} = \left(2^{\frac{m_2}{p_n}}3^{\frac{m_3}{p_n}}...n^{\frac{m_n+1}{p_n}}\right)^{p_n}$$. Điều phải chứng minh.

Bài toán 14. Cho A là tập con khác rỗng của N. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho $nA = \{nx \mid x \in A\}$ là tập hợp là luỹ thừa của một số tự nhiên với số mũ lớn hơn 1.

(Balkan 2000)

Nhận xét: Bài toán này tư tưởng giống bài toán trên.

Giả sử $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, $p_1, p_2, ..., p_k$ là k số nguyên tố phân biệt.

Theo định lí đồng dư Trung Hoa, với mọi $i = \overline{1,k}$ tồn tại số nguyên dương m_i thoả mãn

$$\begin{cases} m_i \equiv -1 \pmod{p_i} \\ m_i \equiv 0 \pmod{p_j} \\ j = \overline{1,k},\ j \neq i \end{cases}.$$

Khi đó $(m_1+1, m_2, ..., m_k) \vdots p_1$, $(m_1, m_2+1, m_3, ..., m_n) \vdots p_2, ..., (m_1, m_2, ..., m_n+1) \vdots p_n$.

Đặt $n = a_1^{m_1}a_2^{m_2}...a_k^{m_k}$, ta có:

$$na_1 = a_1^{m_1+1}a_2^{m_2}...a_k^{m_k} = \left(a_1^{\frac{m_1+1}{p_1}}a_2^{\frac{m_2}{p_1}}...a_k^{\frac{m_k}{p_1}}\right)^{p_1},\ na_2 = a_1^{m_1}a_2^{m_2+1}...a_k^{m_k} = \left(a_1^{\frac{m_1}{p_2}}a_2^{\frac{m_2+1}{p_2}}...a_k^{\frac{m_k}{p_2}}\right)^{p_2}$$

$$..., na_k = a_1^{m_1}a_2^{m_2}...a_k^{m_k+1} = \left(a_1^{\frac{m_1}{p_k}}a_2^{\frac{m_2}{p_k}}...a_k^{\frac{m_k+1}{p_k}}\right)^{p_k}$$. Điều phải chứng minh.

***

3. *MỞ RỘNG ĐỊNH LÍ PHẦN DƯ TRUNG HOA*

Trong định lí phần dư Trung Hoa, có điều kiện $m_1, m_2, ..., m_n$ là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau. Câu hỏi đặt ra là nếu $m_1, m_2, ..., m_n$ không thoả mãn điều kiện đôi một nguyên tố cùng nhau thì kết quả định lí này sẽ như thế nào?

Định lí (Phần dư Trung Hoa mở rộng)

Cho n số nguyên dương $m_1, m_2, ..., m_n$ và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên dương bất kì. Khi đó hệ đồng dư tuyến tính

$$\begin{cases} x \equiv a_i (\bmod m_i) \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

có nghiệm khi và chỉ khi $a_i \equiv a_j (\bmod (m_i, m_j))$ với mọi i, j thoả mãn $1 \le i < j \le n$.

Khi đó hệ có nghiệm duy nhất mođun $M = [m_1, m_2, ..., m_n]$.

Chứng minh:

□ Giả sử hệ có nghiệm x_0, đặt $(m_i, m_j) = d_{ij} \Rightarrow a_i \equiv x_0 \equiv a_j (\bmod d_{ij})$ với mọi i, j thoả mãn $1 \le i < j \le n$.

□ Ngược lại nếu $a_i \equiv a_j (\bmod (m_i, m_j))$ với mọi i, j thoả mãn $1 \le i < j \le n$ thì ta chứng minh hệ trên có nghiệm duy nhất mođun $M = [m_1, m_2, ..., m_n]$ bằng quy nạp như sau:

Với n = 2, đặt $(m_1, m_2) = d, m_1 = dd_1, m_2 = dd_2, (d_1, d_2) = 1 \Rightarrow a_1 \equiv a_2 \equiv a (\bmod d)$

Đặt $a_1 = a + k_1 d, a_2 = a + k_2 d$, ta có:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 (\bmod m_1) \\ x \equiv a_2 (\bmod m_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-a}{d} \equiv k_1 (\bmod d_1) \\ \dfrac{x-a}{d} \equiv k_2 (\bmod d_2) \end{cases}$$

Vì $(d_1, d_2) = 1$ nên theo định lí phần dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên dương $\overline{x}$ thoả mãn $\begin{cases} \overline{x} \equiv k_1 (\bmod d_1) \\ \overline{x} \equiv k_1 (\bmod d_1) \end{cases}$. Do đó $\begin{cases} x \equiv a_1 (\bmod m_1) \\ x \equiv a_2 (\bmod m_2) \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-a}{d} \equiv \overline{x} (\bmod (d_1 d_2))$

$\Leftrightarrow x \equiv \overline{x} d + a (\bmod (dd_1 d_2))$ hay $x \equiv \overline{x} d + a (\bmod [m_1, m_2])$.

Suy ra hệ $\begin{cases} x \equiv a_1 (\bmod m_1) \\ x \equiv a_2 (\bmod m_2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất mođun $[m_1, m_2]$.

Giả sử định lí đúng đến n – 1. Ta chứng minh định định lí đúng đến n.

Đặt $\overline{m_1} = [m_1, m_2, ..., m_{n-1}], \overline{m_2} = m_n$

Theo giả thiết quy nạp, hệ phương trình $\begin{cases} x \equiv a_i (\text{mod}\, m_i) \\ i = \overline{1, n-1} \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

$x \equiv \overline{a_1} (\text{mod}\, \overline{m_1})$. Do đó ta có $\begin{cases} x \equiv a_i (\text{mod}\, m_i) \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \overline{a_1} (\text{mod}\, \overline{m_1}) \\ x \equiv \overline{a_2} (\text{mod}\, \overline{m_2}) \end{cases}$ (đặt $\overline{a_2} = a_n$).

Vì $a_i \equiv a_j (\text{mod}(m_i, m_j))$ với mọi i, j thoả mãn $1 \le i < j \le n$ nên $\overline{a_1} \equiv \overline{a_2} (\text{mod}(\overline{m_1}, \overline{m_2}))$. Từ đó theo trường hợp n = 2, hệ phương trình $\begin{cases} x \equiv \overline{a_1} (\text{mod}\, \overline{m_1}) \\ x \equiv \overline{a_2} (\text{mod}\, \overline{m_2}) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất môđun

$[\overline{m_1}, \overline{m_2}] = [m_1, m_2, ..., m_n]$.

Theo nguyên lí quy nạp định lí được chứng minh.

***

Một số bài tập áp dụng:

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, luôn tồn tại n số tự nhiên liên tiếp sao cho bất kì số nào trong các số đó cũng có ước nguyên dương dạng $2^k - 1$.

Bài 2. Chứng minh rằng tồn tại vô số dãy vô hạn tăng $\{a_n\}$ các số tự nhiên sao cho với mọi số tự nhiên k, dãy $\{k+a_n\}$ chỉ chứa hữu hạn số nguyên tố.

Czech-Slovakia 1997

Bài 3. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^n - 1 \vdots 3$ và $\dfrac{2^n - 1}{3}$ là ước của một số nguyên có dạng $4m^2 + 1$.

Korea 1999

Bài 4. Ta định nghĩa hình vuông tốt là một hình vuông có 4 đỉnh là các điểm nguyên, đồng thời đoạn thẳng nối tâm O với tất cả các điểm nguyên trên biên và trong hình vuông đó chứa ít nhất một điểm nguyên khác hai đầu mút. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n đều tồn tại một hình vuông tốt dạng n×n.

Bài 5. Tìm số nguyên dương n sao cho với mọi hệ thặng dư thu gọn môđun n $\{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}\}$ ta có $a_1 a_2 ... a_{\varphi(n)} \equiv -1 (\text{mod}\, n)$.

Bài 6. Cho $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ là n đa thức với hệ số nguyên khác 0. Chứng minh rằng tồn tại đa thức P(x) hệ nguyên sao cho với mọi $\forall i = \overline{1;n}$ ta luôn có $P(x) + f_i(x)$ là đa thức bất khả quy trên Z.

Bài 7. Cho $m = 2007^{2008}$, hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên $n < m$ sao cho $m \mid n(2n+1)(5n+2)$.

Bài 8. Ta gọi một tập hợp các số nguyên dương C là tốt nếu với mọi số nguyên dương k thì tồn tại a,b khác nhau trong C sao cho $(a+k; b+k) > 1$. Giả sử ta có một tập tốt mà tổng các phần tử trong đó bằng 2003. Chứng minh rằng ta có thể loại đi một phần tử c trong C sao cho tập còn lại vẫn là tập tốt .

Bulgaria TST 2003

Bài 9. Chứng minh rằng tồn tại dãy (a_n) tăng thực sự sao cho với mọi n thì $a_1a_2...a_n - 1$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

USA -TST 2009

Bài 10. a) Chứng minh rằng tập các số nguyên có thể phân hoạch thành các cấp số cộng với công sai khác nhau.

b) Chứng minh rằng tập hợp các sô nguyên không thể viết dưới dạng hợp của các cấp số cộng với công sai đôi một nguyên tố cùng nhau.

Moldova TST 2009

Bài 11. Tìm tất cả các bộ các số nguyên (a, b, c, a', b', c') sắp thứ tự thỏa mãn:

$$a, b, c, a', b', c' \in \{0,1,2,...,14\} \text{ và } \begin{cases} ab + a'b' \equiv 1 \pmod{15} \\ ac + a'c' \equiv 1 \pmod{15} \\ bc + b'c' \equiv 1 \pmod{15} \end{cases}$$

VMO 2013

Tài liệu tham khảo

- Đặng Hùng Thắng – Đồng dư và phương trình đồng dư
- Nguyễn Vũ Lương – Các bài giảng về số học
- Tuyển chọn các chuyên đề toán học tuổi trẻ – Tập 3
- Diễn đàn – http://mathvn.org

Một số bài toán về hàm số bậc nhất và bậc hai

Đỗ Văn Đức, Tổ trưởng tổ Toán-Tin Trường THPT Chuyên Lương Văn Tụy

Trong chương trình lớp 10, học sinh đã được học về các hàm số bậc nhất và bậc hai; đây là 2 hàm số cơ bản trong chương trình lớp 10, học sinh đã được học và có rất nhiều ứng dụng trong kỳ thi các cấp.

Sau đây tôi nêu lên một số ví dụ áp dụng hai hàm số trên (kể cả trường hợp suy biến) để giải toán.

I. Ta chú ý đến một số kết quả sau:

1-Hàm số $f(x)$ luôn đồng biến, hoặc luôn nghịch biến, hoặc không đổi trên $[\alpha, \beta]$ thì:

$$\underset{[\alpha,\beta]}{Max}\ |f(x)| = Max\{|f(\alpha)|, |f(\beta)|\}$$

2-Hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$$\underset{[\alpha,\beta]}{Max}\ |f(x)| = \begin{cases} Max\{|f(\alpha)|, |f(\beta)|\}\ Khi\ \dfrac{-b}{2a} \in (\alpha, \beta) \\ \\ Max\{|f(\alpha)|, |f(\beta)|, f(\dfrac{-b}{2a})\}\ Khi\ \dfrac{-b}{2a} \in (\alpha, \beta) \end{cases}$$

3-Max $|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \geq$ Max(Max… (Max $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$)…)

$x_i \in D_i$ ($i = 1, 2, .. n$) $\quad x_1 \in D_1$ $x_2 \in D_2$ $\quad x_n \in D_n$

II. Phân loại

Các bài toán được chia làm 2 loại:

A- Các bài toán ứng dụng hàm bậc nhất và suy biến (từ bài 1 đến bài 14)

B-Các bài toán ứng dụng hàm bậc hai và suy biến và bài toán phối hợp với A (từ bài 15 đến 42)

C- Các bài toán ứng dụng phối hợp hai hàm số trên.

A. Các bài toán ứng dụng hàm y = ax + b và suy biến

Bài toán 1. (đề thi vô địch KIEP)

Chứng minh rằng với bất cứ a, b nào cũng tìm được $x, y \in [0,1]$ để

$$|xy - ax - by| \geq \frac{1}{3}$$

Giải: Bài này đã có nhiều sách đưa lời giải nhưng các lời giải đều mang tính chất áp đặt. Với cách giải như vậy là không cho ta cách mở rộng được bài toán, đồng thời cũng không cho ta cách tìm thấy số $\frac{1}{3}$. Sau đây tôi đưa ra cách giải sử dụng tính chất hàm $y = ax + b$, và qua đó cho ta ra thêm hàng loạt các bài toán dạng này. $\quad Max\ |xy-ax-by| \geq Max\ \{|a|, |b|, |a+b-1|\} \geq \frac{1}{3}|a+b-a-b+1| = \frac{1}{3}$

Bài toán 2. Cho số thực α, β, b ($\alpha < \beta$) Tìm a để

$$\underset{[\alpha,\beta]}{Max}\,|ax+b| \quad \text{Có giá trị bé nhất}$$

Lời giải: $\underset{[\alpha,\beta]}{Max}\,|ax+b| = Max\{|a\alpha+b|,\ |a\beta+b|\}$

$$\geq \frac{|a\alpha\beta+b\beta|+|a\alpha\beta+b\alpha|}{|\alpha|+|\beta|} \geq \frac{|b||\beta-\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}$$

$$\text{Có đẳng thức} \Leftrightarrow \begin{cases} |a\alpha+b| = |a\beta+b| & (1) \\ \alpha\beta(a\alpha+b)(-a\beta-b)\geq 0 & (2) \end{cases}$$

- Nếu $\alpha\beta \geq 0$ $\quad (2) \Leftrightarrow (a\alpha+b)(-a\beta-b)\geq 0$ *khi đó*

$$(1) \Rightarrow a\alpha+b = -a\beta-b \leftrightarrow a = \frac{-2b}{\alpha+\beta}$$

- Nếu $\alpha\beta \leq 0$ $\quad (2) \Leftrightarrow (a\alpha+b)(-a\beta-b)\leq 0$

  Khi đó $\quad (1) \Rightarrow a\alpha+b = a\beta+b \leftrightarrow a = 0$

Vậy $\underset{[\alpha,\beta]}{Max}|ax+b|$ bé nhất bằng $\dfrac{|b||\beta-\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}$ *khi* $\left[\begin{array}{l} \alpha\beta \geq 0 \text{ và } a = \dfrac{-b}{\alpha+\beta} \\ \alpha\beta \leq 0 \text{ và } a = 0 \end{array}\right.$

Bài toán 3: Cho hai số α và β xét các hàm số

$f(x) = a^2x + \alpha a + \beta$

Xác định a để $\underset{[-1,1]}{Max}\,|f(x)|$ nhỏ nhất

Lời giải:

<u>Trường hợp 1:</u> $\beta \geq 0$

- Khi $\alpha^2 - 2\beta > 0$, ta chọn $k > 0$ sao cho

$$\frac{\alpha(1-k)}{2(1+k)} = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow k = \frac{\alpha^2+2\beta}{\alpha^2-2\beta} > 0$$

$$\underset{[-1,1]}{Max}\,|f(x)| = Max\{|a^2+\alpha a+\beta|;\ |a^2-\alpha a-\beta|\}$$

$$\geq \frac{1}{k+1}|ka^2 + k\alpha a + k\beta + a^2 - \alpha a - \beta|$$

$$= |a^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}a + 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}| = (a+\frac{\beta}{\alpha})^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \geq \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

- Khi $\alpha^2 - 2\beta \leq 0$

$$\Rightarrow \underset{[-1,1]}{Max}\,|f(x)| = Max\{|a^2+\alpha a+\beta|,\ |a^2-\alpha a-\beta|\}$$

Ta chứng minh $\underset{[-1,\,1]}{\text{Max}}\,|f(x)|$ bé nhất là $\beta - \dfrac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow a = -\dfrac{\alpha}{2}$

Thật vậy với $a = -\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow Max\{|a^2 + \alpha a + \beta|, |a^2 - \alpha a - \beta|\}$

$$= Max\{\beta - \frac{\alpha^2}{4}; |\frac{3\alpha^2}{4} - \beta|\} = \beta - \frac{\alpha^2}{4}.$$

(Vì $(\beta - \dfrac{\alpha^2}{4}) - \left|\dfrac{3\alpha^2}{4} - \beta\right| = \begin{cases} 2\beta - \alpha^2 \\ \dfrac{\alpha^2}{2} \end{cases} \Rightarrow (\beta - \dfrac{\alpha^2}{4}) - \left|\dfrac{3\alpha^2}{4} - \beta\right| \geq 0$).

Mặt khác $Max\{|a^2 + \alpha a + \beta|, |a^2 - \alpha a - \beta|\} \geq |a^2 + \alpha a + \beta| =$

$= |(a + \dfrac{\alpha}{2})^2 + \beta - \dfrac{\alpha^2}{4}| \geq \beta - \dfrac{\alpha^2}{4}$ có $\Leftrightarrow a = -\dfrac{\alpha}{2}$

Vậy $\beta \geq 0$ thì $Max\,|f(x)|$ bé nhất $= \begin{cases} \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} & khi\ \alpha^2 - 2\beta \geq 0,\ \beta \geq 0 \quad và\ a = \dfrac{-\beta}{\alpha} \\ \beta - \dfrac{\alpha^2}{4} & khi \alpha^2 - 2\beta \leq 0, \beta \geq 0 \quad và\ a = \dfrac{-\alpha}{2} \end{cases}$

Trường hợp 2: $\beta < 0$

$\underset{[-1;1]}{Max}|f(x)| = \underset{[-1;1]}{Max}|a(-x) + (-\alpha)a + (-\beta)|$

Áp dụng kết quả của trường hợp 1 (thay β bởi (-β) và α bởi $(-\alpha)$)

Vậy ta có kết luận chung

$\underset{[-1,1]}{Max}|f(x)|$ bé nhất $= \begin{cases} \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} khi\ \alpha^2 - 2|\beta| > 0\ và\ a = -\dfrac{\alpha}{\beta} \\ |\beta| - \dfrac{\alpha^2}{4} khi\ \alpha^2 - 2|\beta| \leq 0\ và\ a = \dfrac{-|\beta|}{2\beta}\alpha \end{cases}$

Bây giờ ta lại xét bài toán 2 ở trên với điều kiện :

$\alpha^2 - 2\beta > 0,\ \beta > 0$ nhưng $a = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ (vô nghiệm) (xét bài 4)

hoặc $\alpha^2 - 2\beta \leq 0,\ \beta > 0$ và phương trình $a = 0$ vô nghiệm (xét bài 5)

Bài toán 4: Cho $0 < \alpha < \beta$ và $\alpha + \beta < \dfrac{25}{8}$

Xét các hàm số $f(x) = (a^2 + 2a + \dfrac{9}{25})x + 1$

Tìm a để $\underset{[\alpha,\beta]}{Max}\,|f(x)|$ nhỏ nhất.

Giải: Để ý rằng với điều kiện $0 < \alpha < \beta$ và $\alpha + \beta < \dfrac{25}{8}$ thì

Phương trình $a^2 + 2a + \dfrac{9}{25} = \dfrac{-2}{\alpha + \beta}$ (vô nghiệm ẩn a)

Nên kết quả bài 2 không thoả mãn

- $a^2 + 2a + \dfrac{9}{25} = 0 \Leftrightarrow a \in \{-\dfrac{1}{5}, -\dfrac{9}{5}\} \Rightarrow f(x) = 1$
- $a^2 + 2a + \dfrac{9}{25} > 0 \Rightarrow f(x) > 1$
- $a^2 + 2a + \dfrac{9}{25} < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{5} < a < -\dfrac{1}{5}$

$+) f(\alpha) = (a^2 + 2a + \dfrac{9}{25})\alpha + 1 > (a^2 + 2a + \dfrac{9}{25})\dfrac{25}{16} + 1 =$

$= [(a+1)^2 - \dfrac{16}{25}]\dfrac{25}{16} + 1 \geq 0$ do $\alpha < \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{25}{16}$

$\Rightarrow |f(\alpha)| = f(\alpha) = [(a+1)^2 - \dfrac{16}{25}]\alpha + 1 \geq 1 - \dfrac{16}{25}\alpha$

Có đẳng thức $\Leftrightarrow a = -1$.

$+) f(\beta) = (a^2 + 2a + \dfrac{9}{25})\beta + 1$

- Khi $\beta \leq \dfrac{25}{16} \Rightarrow f(\beta) \geq f(\dfrac{25}{16}) \geq 0$

$\Rightarrow f(\alpha) > f(\beta) > 0 \Rightarrow \underset{[\alpha,\beta]}{Max}|f(x)| = f(\alpha) \geq 1 - \dfrac{16}{25}\alpha$ tại $a = -1$

- Khi $f(\beta) \leq 0 \Rightarrow \beta \geq \dfrac{25}{16} \Rightarrow |f(\beta)| = -f(\beta) = -1 - [(a+1)^2 - \dfrac{16}{25}]\beta = f_1$

do $\dfrac{25}{16} \leq \beta < \dfrac{25}{8} - \alpha \Rightarrow f_1 \leq 1 - [(a+1)^2 - \dfrac{16}{25}](\dfrac{25}{8} - \alpha) =$

$= 1 - \dfrac{16}{25}\alpha - (a+1)^2(\dfrac{25}{8} - \alpha) \leq 1 - \dfrac{16}{25}\alpha \leq f(\alpha)$

Vậy $\underset{[\alpha,\beta]}{Max}|f(x)| \geq 1 - \dfrac{16}{25}\alpha$ có đẳng thức $\Leftrightarrow a = -1$

Bài toán 5: $f(x) = (a^2+1)x - 1$ cho $\alpha < 0 < \beta$

Tìm a để $\underset{[\alpha,\beta]}{Max}|f(x)|$ bé nhất

Lời giải:

Trường hợp này $a^2 + 1 = 0$ vô nghiệm nên giải như bài 2 không được:

$M = \underset{[\alpha,\beta]}{Max}|f(x)| = Max\{|f(\alpha)|; |f(\beta)|\} = Max\{|(a^2+1)\alpha - 1|; |(a^2+1)\beta - 1|\}$

$f(\alpha) = |(a^2+1)\alpha - 1| = 1 - \alpha(a^2+1) = 1 + (a^2+1)|\alpha| \geq 1 + |\alpha|$

Nếu $M = |f(\beta)| = |(a^2+1)\beta - 1|$ thì $M \geq 1 + |\alpha|$, do đó

$M = |(a^2+1)\beta - 1| = (a^2+1)\beta - 1 \geq \beta - 1 \geq 1 + |\alpha| \Leftrightarrow \beta \geq 2 + |\alpha|$

Vậy $\beta \geq 2+|\alpha| \Rightarrow$ M bé nhất là $\beta - 1 \Leftrightarrow a = -1$

Còn $\beta < 2+|\alpha| \Rightarrow$ M bé nhất là $|\alpha| + 1 \Leftrightarrow a = -1$

Vậy M bé nhất $= Max\{\beta - 1; |\alpha|+1\} \Leftrightarrow a = -1$

Bài toán 6: Cho $0<a_1<a_2<a_3$; $\dfrac{b_1}{a_1} < \dfrac{b_2}{a_2} < \dfrac{b_3}{a_3}$

$f(x) = Max\{|a_1x - b_1|; |a_2x - b_2|; |a_3x - b_3|\}$

Tìm $\underset{R}{Min} f(x)$

Giải:

*) Phương trình: $(-a_3)x + b_3 = a_1x - b_1 \Leftrightarrow x = x_1 = \dfrac{b_1 + b_3}{a_1 + a_3}$ (1)

*) Phương trình: $(-a_3)x + b_3 = a_2x - b_2 \Leftrightarrow x = x_2 = \dfrac{b_2 + b_3}{a_2 + a_3}$ (2)

Khiđó $\dfrac{b_1}{a_1} < \dfrac{b_3}{a_3} \Rightarrow \dfrac{b_1}{a_1} < x_1 < \dfrac{b_3}{a_3}$, $\dfrac{b_2}{a_2} < \dfrac{b_3}{a_3} \Rightarrow \dfrac{b_2}{a_2} < x_2 < \dfrac{b_3}{a_3}$ (3)

Ta xét 2 trường hợp

I. Khi $x_2 \geq x_1$

Ta chứng minh $\underset{R}{Min} f(x) = |a_1x_1 - b_1|$

a) Ta chứng minh $f(x_1) = |a_1x_1 - b_1|$

Do (3) $\Rightarrow |a_1x_1 - b_1| = a_1x_1 - b_1 = -a_3x_1 + b_3 = |a_3x_1 - b_1|$

Ta chứng minh $|a_1x_1 - b_1| > |a_2x_1 - b_2|$

*) $a_1x_1 - b_1 \geq -a_2x_1 + b_2 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{b_1 + b_3}{a_1 + a_3} > \dfrac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}$

$\Leftrightarrow a_2b_1 + a_1b_3 > a_1b_2 + a_3b_1 + a_3b_2$

$\Leftrightarrow (a_1b_3 - a_3b_1 + a_2b_1 - a_1b_2) + (a_2b_3 - a_3b_2) > 0$ đúng

Do $\dfrac{b_3}{a_3} - \dfrac{b_1}{a_1} > \dfrac{b_2}{a_2} - \dfrac{b_1}{a_1} \Leftrightarrow a_1b_3 - a_3b_1 > \dfrac{a_3}{a_2}(a_1b_2 - a_2b_1) > a_1b_2 - a_2b_1$

*) $|a_1x_1 - b_1| = a_1x_1 - b_1 = -a_3x_1 + b_3 \geq -a_3x_2 + b_3 = a_2x_2 - b_2 \geq a_2x_1 - b_1$

Vậy $f(x_1) = |a_1x_1 - b_1|$

b) Ta chứng minh $f(x) \geq f(x_1)$, $\forall x \in R$

*) $x < x_1 \Rightarrow -a_3x + b_3 > -a_3x_1 + b_3 = a_1x_1 - b_1 = f(x_1)$

*) $x > x_1 \Rightarrow a_1x - b_1 > a_1x_1 - b_1 = f(x_1)$

Vậy $\underset{x \in R}{Min} f(x) = |a_1x_1 - b_1| = \left(\frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1 + a_3}\right)$

II) Khi $x_1 \geq x_2$

a) Ta chứng minh $f(x_2) = |ax_2 - b_2|$

- $|a_2x_2 - b_2| = a_2x_2 - b_2 = - a_3x_2 + b_3 = |a_3x_2 - b_3|$

- $|a_2x_2 - b_2| = a_2x_2 - b_2 = - a_3x_2 + b_3 > - a_3x_1 + b_3$

$$= a_1x_1 - b_1 > a_1x_2 - b_2 > a_1\frac{b_1}{a_1} - b_2 > 0 \Rightarrow |a_2x_2 - b_2| > |a_1x_2 - b_1|$$

$$\Rightarrow f(x_2) = |ax_2 - b_2|$$

b) Ta chứng minh $f(x) \geq f(x_2),\ \forall x \in R$

Nếu $x \geq x_2 \Rightarrow f(x) \geq |a_2x - b_2| = a_2x - b_2 \geq |a_2x_2 - b_2|$

$x < x_2 \Rightarrow f(x) \geq |-a_3x + b_3| = -a_3x + b_3 > -a_3x_2 + b_3 = |a_2x_2 - b_2|$

Vậy $\underset{x \in R}{Min} f(x) = Max\ \{f(x_1); f(x_2)\} = Max\left\{\left|\frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1 + a_3}\right|; \left|\frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_2 + a_3}\right|\right\}$

Bài toán 7:

Đặt $g_1(x) = |x-1|$

$g_{n+1}(x) = |g_n(x) - 1|\ \forall n \geq 1, n \in N$

gọi $f_n(x) = g_n(x) - ax - b$

Cho số nguyên dương k, n, q; $1 \leq k \leq n$

Xác định số thực a, b để. $\underset{k \leq x \leq n}{Max}|S_q(x)|$ bé nhất, với $n \leq q, q \in N, k \leq x \leq n$

KẾT LUẬN

1) Max $|f_q(x)|$ bé nhất bằng 0 với $\forall q = 1,2,.....$

[k, k+1] ; k≥1 ; k∈ N

2) Max $|f_q(x)|$ bé nhất bằng $\begin{cases} 0 \text{ khi } 1 \leq q \leq k \\ \frac{1}{2} \text{ khi } q \geq n \end{cases}$

[k,n];

n≥k+2; k≥1 ; k∈ N

Vấn đề còn lại là k<q<n

Bài toán 8

Cho số nguyên $q \geq 1$. $g_1(x) = |x-1|$; $g_{n+1}(x) = |g_n(x)-1|$

$\forall m \geq 1$ $f_m(x) = g_m(x) - ax - b$

Tìm a, b để $\underset{[0,n]}{\text{Max}} |f_q(x)|$ bé nhất ($q \geq n$)

Bài toán 9

Cho số nguyên dương $k<n\leq 0$; $q \in N^*$

$g_1(x) = |x-1|$

$g_{n+1}(x) = |g_n(x)-1|$ với $\forall n \geq 1$; $n \in N$

$f_n(x) = g_n(x) - ax - b$

Tìm a,b để $\underset{[k,n]}{\text{Max}} |f_q(x)|$ bé nhất

KL:

- $\underset{[k,k+1]}{\text{Max}} |f_q(x)|$ bé nhất $= 0$ với $\forall q \geq 1$
- $\underset{[k,n\geq k+2],\ k<n\leq 0}{\text{Max}} |f_q(x)|$ bé nhất $= \begin{cases} 0 \text{ khi } 1 \leq p \leq 2-n \\ \dfrac{1}{2} \text{ khi } q \geq 2-k \leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$

Vấn đề còn lại là $3-n \leq q \leq 1-k$

Bài toán 10

$g_1(x) = |x-1|$; $g_{n+1}(x) = |g_n(x)-1|$ $\forall n \geq 1; n \in N$

$f_n(x) = g_n(x) - ax - b$

Cho $k<0<n$; $k, n \in N; q \in N$; $\begin{cases} q \geq 2-k \\ q \geq n \end{cases}$

Tìm a, b để $\underset{[k,n]}{\text{Max}} |f_q(x)|$ bé nhất

SAU ĐÂY LÀ MỘT SỐ VÍ DỤ DẠNG NÀY

Bài toán 11

Tìm a, b để $\underset{[-3,0]}{\text{Max}} |f_3(x)|$ min

Bài toán 12

Tìm a, b để $\underset{[-3,4]}{\text{Max}} |f_2(x)|$ bé nhất

Bài toán 13

Cho k, $n \in Z$; $n \leq -1$

Tìm a, b để Max$|f_2(x)|$ bé nhất

Bài toán 14

Cho số tự nhiên $n \geq 2$; và 2n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ khác 0; $b_1, b_2, ..., b_n$

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} |a_i x - b_i|$$

1) CMR $\underset{R}{\text{Min}}\ f_n(x) = \text{Min}\{f_n(\frac{ai}{bi})\ ; i = 1,...,n\}$

2) Tìm Min $f_n(x)$ với $\sum_{i=1}^{n} |ix - i - 1| = f(x)|$

3) Min $f_n(x)$ với $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} |\sqrt{i}x - \sqrt{i+1}|$

B-CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG H ÀM BẬC HAI

Bài toán 15

$f(x) = \sum_{i=1}^{3} |(x-i)(x-i-1)|$ tìm $\underset{R}{M}\text{in}\, f(x)$

Gi ải

Ta có $f(x) = |x^2 - 3x+2| + |x^2 - 7x+12| + |-x^2+5x-6| \geq |x^2 - 3x+2+ x^2 - 7x+12 - x^2+5x-6|$

$= |x^2 - 5x+8| = (x-\frac{5}{2})^2+\frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$

Có đẳng thức $\leftrightarrow$ $\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x^2 - 3x+2;\ x^2 - 7x+12;\ -x^2+5x-6 \text{ c ùng dấu} \end{cases} \leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

V y Min f(x) = $\frac{7}{4} \leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Bài toán 16

$f(x) = |(x-1)(x-2)| + |(x-2)(x-3)| + |(x-3)(x-a)|$, $(a \geq 3)$

1) Tìm $\underset{R}{\text{Min}}\ f(x)$

2) Xác định tất cả các giá trị thực của $a \geq 3$ để:

a) $\underset{R}{\text{Min}}\ f(x)$ đạt Max?

b) $\underset{R}{\text{Min}}\ f(x)$ bé nhất

Gi ải:

1) Ta có

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2-(a+11)x+3a+8 \geq 2a \text{ (có đt } \leftrightarrow x=1) \text{ khi } x \leq 1 \rightarrow (\frac{a+11}{6} \geq \frac{14}{6} > 2) \\ x^2-(a+5)x+3a+4 \geq a-2 \text{ (có đt } \leftrightarrow x=2) \text{ khi } 1 \leq x \leq 2;\ \frac{a+5}{2} \geq 4 \\ x^2-(a+1)x+3a-4 = f_1(x) \text{ khi } 2 \leq x \leq 3 \\ x^2-(a-5)x+3a-8 \geq 2 \text{ (có đt } \leftrightarrow x=3) \text{ (do } \frac{5-a}{2} < \frac{1}{2} \text{) khi } 3 \leq x \leq a \\ 3x^2-(a+11)x+3a+8 = f_2(x) \text{ khi } x \geq a \end{cases}$$

TH1: $3 \leq a \leq 4 \rightarrow a-2 \leq 2 \leq 2a$; $f_2(x)$ c ó x $Đ_1 = \frac{a+1}{2} \in [2, \frac{5}{2}] \subset [2,3]$

$\rightarrow \underset{[2,3]}{\text{Min}} f_1(x) = f_1(\frac{a+1}{2}) = \frac{1}{4}(-a^2+10a-17) \leq a-2 \leftrightarrow (a-3) \geq 0$ c ó đt $\leftrightarrow a=3$

$f_2(x)$ c ó x $_{D2} = \frac{a+11}{6} \in [\frac{7}{3}, \frac{5}{2}] \subset [2,3] \rightarrow f_2(x) \geq f_2(a) = 2a^2-8a+8 = 2(a-2)^2 \geq 2$

V ậy $3 \leq a \leq 4 \rightarrow$ Min f(x) = $\frac{1}{4}(-a^2+10a-17)$ đ ạt $\leftrightarrow x = \frac{a+1}{2}$

TH2: $4 \leq a \leq 5 \rightarrow 2 \leq a-2 \leq 2a$

+) $f_1(x)$ có $X_{D1} = \frac{a+1}{2} \in [\frac{5}{2}, 3] \subset [2,3]$

$\rightarrow \underset{[2,3]}{\text{Min}} f_1(x) = f_1(\frac{a+1}{2}) = \frac{1}{4}(-a^2+10a-17) \leq 2 \leftrightarrow (a^2-10a+25) \geq 0 \leftrightarrow (a-5)^2 \geq 0$

+) $f_2(x)$ c ó $x_{D2} = \frac{a+11}{6} \in [\frac{5}{2}, \frac{8}{3}] \rightarrow f_2(x) \geq f_2(a) = 2(a-2)^2 \geq 8$

V ậy Min f(x) = $\frac{1}{4}(-a^2+10a-1)$ đạt $\leftrightarrow x = \frac{a+1}{2}$

TH3: $a \geq 5 \rightarrow 2 \leq a-2 \leq 2a$

+) $f_1(x)$ có $x_{D1} = \frac{a+1}{2} \geq 3 \rightarrow f_2(x) \geq f_1(3) = 2$

+) $f_2(x)$ c Ó $x_{D2} = \frac{a+11}{6} < a \leftrightarrow a \geq \frac{11}{5}$ (đúng do $a \geq 5$) $\rightarrow f_2(x) \geq f_2(a) = 2(a-2)^2 \geq 18$

V ậy Min f(x) = 2 đạt $\leftrightarrow x = 3$

Kết luận

Min f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{4}(-a^2+10a-17) \text{ khi } 3 \leq a \leq 5 \text{ đạt } \leftrightarrow x = \frac{a+1}{2} \\ \end{cases}$

R 2 $\leftrightarrow$ x =3 khi a≥5

2)

a) 3≤a≤5 $\rightarrow \frac{1}{4}(-a^2+10a-17)=\frac{1}{4}[4-(a-3)^2-4(3-a)]\le\frac{1}{4}4=1$ có đt $\leftrightarrow$ a= 3

V ậy a = 3 $\underset{R}{Min}$ f(x) bé nhất = 1

b) 3≤a≤5 $\rightarrow \frac{1}{4}(-a^2+10a-17)=\frac{1}{4}(8-(a-5)^2\ge 2$

Vậy a = 3 Min f(x) (Max) = 2 $\leftrightarrow$ a≥5

Bài toán 17

Cho n≥3

f(x) = $\sum_{i=1}^{n}|(x-i)(x-i-1)|$; tìm Min f(x) trên R.

Giải

TH1: n = 2k+1(k≥1) $\Rightarrow f(x)\ge|\sum_{i=1}^{2k+1}(x-i)(x-i-1)-2(x-k-1)(x-k-2)|$

$$=|\sum_{i=1}^{2k+1}[x^2-(2i+1)x+i^2+1]-2x^2+(4k+6)x-2k^2-6k-4|$$

$$=|(2k-1)x^2-(4k^2+4k-3)x+\frac{(k+1)(8k^2+10k-6)}{3}|$$

$$=|(2k-1)(x-\frac{4k^2+4k-3}{2(2k-1)})^2+\frac{(k+1)(8k^2+10k-6)}{3}-\frac{(4k^2+4k-3)^2}{4(2k-1)}|=A$$

$$=|(2k-1)(x-\frac{2k+3}{2})^2+\frac{8k^3+12k^2-12k+3}{12}|\ge\frac{8k^3+12k^2-2k+3}{12}$$

C ó đẳng thức $\leftrightarrow$x = $\frac{2k+3}{2}\in[k+1,k+2]$

Vậy Min f(x) = $\frac{8k^3+12k^2-2k+3}{12}$ đạt $\leftrightarrow$x = $\frac{2k+3}{2};(k=\frac{n-1}{2})$

$=\frac{1}{12}(n^3-14n+6)$ đạt $\leftrightarrow$x = $\frac{n+2}{2}$

TH2: n = 2k (k≥2)

$$\Rightarrow f(x)\ge|\sum_{i=1}^{2k}(x-i)(x-i-1)-2(x-k)(x-k-1)-2(x-k-1)(x-k-2)|$$

$$=|\sum_{i=1}^{2k}[x^2-(2i+1)x+i^2+1]-2(x-k)(x-k-1)-2(x-k-1)(x-k-2)|=$$

$$|(2k-2)x^2-4(k-2)(k+1)x+\frac{(8k^3-20k-12)}{3}|=|2(k-2)(x-k-1)^2+\frac{2k}{3}(k^2-1)|\geq\frac{2k}{3}(k^2-1)$$

Có đẳng thức $\leftrightarrow$ x = k+1 $\in$ [k,k+2] $\rightarrow$ Min f(x) = $\frac{n(n^2-4)}{12} \leftrightarrow x=\frac{n}{2}+1$

R

Tóm lại: $\text{Min} \sum_{i=1}^{n} |(x-i)(x-i-1)| = \begin{cases} \frac{n^3-14n+6}{12} & \text{khi n lẻ đạt } \leftrightarrow x=\frac{n+2}{2} \\ \frac{n(n^2-4)}{12} & \text{khi n chẵn đạt } \leftrightarrow x=\frac{n+2}{2} \end{cases}$

Bài toán 18:

Tìm p để Max|f(x)| bé nhất với f(x) = x^2- px -2p

<u>Giải</u>

<u>TH1</u> -2≤p≤2 $\rightarrow$ $\underset{-1\leq x\leq 1}{\text{Max}}|f(x)| = \text{Max}\{|f(-1)|, |f(1)|, |f(\frac{p}{2})|\}$

$\text{Max}|f(x)| \geq \text{Max}\{|f(-1)|, |f(\frac{p}{2})|\} = \max\{|1-p|; |\frac{p^2}{4}+2p|\}$

$\geq \frac{1}{k+1}|k-kp+\frac{p^2}{4}+2p|$ (vĩi $k=\sqrt{10}-1>0$)

$=\frac{1}{\sqrt{10}}|(\frac{p}{2}+3-\sqrt{10})^2+7\sqrt{10}-20|\geq\frac{7\sqrt{10}-20}{\sqrt{10}}=7-2\sqrt{10}$ c ó đt khi $p=\sqrt{10}-3$

Mặt khác $p=\sqrt{10}-3$

$$\Rightarrow f(1)=19-6\sqrt{6}<7\sqrt{10}-20$$
$$f(-1)=7-2\sqrt{10}$$
$$f(\frac{p}{2})=2\sqrt{10}-7$$

<u>TH2</u> |p| > 2

$\rightarrow \underset{-1\leq x\leq 1}{\text{Max}}|f(x)| \geq f(0) = |2p| \geq 4 > 7-2\sqrt{10}$

Vậy $p=\sqrt{10}-3$ th× $\underset{-1\leq x\leq 1}{\text{Max}}|f(x)|$ bé nhất là $7-2\sqrt{10}$

Chú ý việc đưa $k=\sqrt{10}-1$ vào giải

Bài toán 19:

Số thực p có tính chất : bất cứ số thực a, b nào cũng tìm được $x, y \in [0,1]$ để $|x^2y - ax - by| \geq p$. Tìm max p .

Giải

$$\max_{x\in[0,1]}|(x^2-b)y - ax| = \max_{x\in[0,1]}\{|-ax|;|x^2-ax-b|\} = \max\{|a|;|x^2-ax-b|\}$$

$$= \max\{|a|;\max_{x\in[0,1]}|x^2-ax-b|\} = f$$

TH1: $\frac{a}{2} \in [0,1] \rightarrow f = \max\{|a|;|b|;|1-a-b|,|\frac{a^2}{4}+b|\}$

$$\geq \max\{|a|;|1-a-b|,|\frac{a^2}{4}+b|\} \geq \frac{(\alpha a+1-a-b+\frac{a^2}{4}+b)}{\alpha+2} = (\frac{1}{\alpha+2})(\frac{a^2}{4}+(\alpha-1)a+1)$$

$$\geq \frac{1}{\alpha+2}(\frac{-\Delta}{4\frac{a^2}{4}}) = \frac{2\alpha-\alpha^2}{\alpha+2} \text{ với } \alpha = 2(\sqrt{2}-1) > 0$$

Có đẳng thức $\leftrightarrow \begin{cases} a = 1-a-b = \frac{a^2}{4}+b = \frac{2\alpha-\alpha^2}{\alpha+2} = 6-4\sqrt{2} \\ |b| \leq |a| \end{cases}$

$$\leftrightarrow \begin{cases} a = 6-4\sqrt{2} \\ 0<b = 8\sqrt{2}-11 < 6-4\sqrt{2} = a \end{cases}$$

TH2 $\frac{a}{2} \notin [0,1] \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a>2 \\ a<0 \end{array}\right.$

- $a>2 \rightarrow \max_{x,y\in[0,1]}|x^2y - ax - by| \geq |a|>2$
- $a<0 \rightarrow \max|x^2y - ax - by| \geq$

$\max\{|b|;|1-a-b|\} \geq \frac{(1-a-b+b)}{2} = \frac{1-a}{2} > \frac{1}{2} > 6-4\sqrt{2}$

Vậy Max p = $6-4\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6-4\sqrt{2} \\ b = 8\sqrt{2}-11 \end{cases}$

Bài toán 20

Cho số thực $\alpha \in (-1,1)$ xét các hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$
thỏa mãn $|f(1)| \le 1$; $|f(-1)| \le 1$; $|f(\alpha)| \le 1$
Tìm a,b,c để $\max\limits_{-1\le x\le 1} |f(x)|$ lớn nhất

Bài toán 21

Cho k<d<l

Xét các hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thoả mãn $\begin{cases} |f(k)| \le 1 \\ |f(d)| \le 1 \\ |f(l)| \le 1 \end{cases}$

Tìm a, b, c để $\max\limits_{k\le x\le l} |f(x)|$ lớn nhất

Giải

Ta chuyển vế biểu thức trên như sau :

Đặt t = px + q ta xác định p, q sao cho $\begin{cases} kp + q = 1 \\ Kl + q = 1 \end{cases}$

$$\leftrightarrow \begin{cases} p = \dfrac{2}{l-k} \\ q = \dfrac{-k-l}{l-k} \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2k}{l-k} - \frac{k+l}{l-k}$$

đặt $\alpha = \dfrac{2a-k-l}{l-k} \rightarrow -1 < \alpha < 1$ khi k<d<l

Vậy $f(x) = g(t) = a(\dfrac{t-q}{p})^2 + b(\dfrac{t-q}{p}) + c$

$$\Rightarrow \begin{cases} |g(-1)| = |f(k)| \le 1 \\ |g(1)| = |g(l)| \le 1 \\ |g(\alpha)| = |f(d)| \le 1 \end{cases}$$

Theo bài trên Max $|g(t)|$ (với $-1 \le t \le 1$) lớn nhất là

$$\frac{1}{1-|\alpha|} + \frac{1-\alpha}{4} = \frac{1}{1-\left|\dfrac{2d-k-l}{l-k}\right|} + \frac{1-\left|\dfrac{2d-k-l}{l-k}\right|}{4} = \frac{l-k}{l-k-(2d-k-l)} + \frac{l-k-1}{4(l-k)}$$

Bài toán 22:

Cho số thực $\alpha \in (-1,1)$ xét các hàm số bậc hai $f(x) = x^2 + bx + c$ thoả mãn $|f(1)| \le 1$ d
$|f(-1)| \le 1$ và $|f(\alpha)| \le 1$.Hãy xác định a, b để Max $|f(x)|$ lớn nhất với $-1 \le x \le 1$

Bổ đề

f(x) = x^2 + bx + c ; $|f(\alpha)| \le 1$; $|f(\beta)| \le 1$; $\alpha < \beta$

CMR: $|f(x)| \le 1 + (\frac{\beta-\alpha}{2})^2$ với $\forall x \in [\alpha, \beta]$

Thật vậy $\begin{cases} f(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + c \\ f(\beta) = \beta^2 + b\beta + c \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} - \alpha - \beta \\ c = \dfrac{1}{\alpha - \beta}(\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)) + \alpha\beta \end{cases}$

$\rightarrow$ f(x) = $(x - \alpha)(x - \beta) + (\frac{x-\beta}{\alpha-\beta})f(\alpha) - (\frac{x-\alpha}{\alpha-\beta})f(\beta)$

$\Rightarrow | f(x) | \le (x-\alpha)(\beta-x) + \frac{\beta-x}{\beta-\alpha} + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} = 1 + (x-\alpha)(\beta-x) \le 1 + (\frac{\beta-\alpha}{2})^2$

Có đẳng thức $\leftrightarrow$ $\begin{cases} x-\alpha = \beta - x \leftrightarrow x = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ f(\alpha) = f(\beta) = -1 \leftrightarrow b = -\alpha-\beta; c = \alpha\beta - 1 \end{cases}$

Áp dụng bổ đề ta có

$\left.\begin{array}{l} |f(\alpha)| \le 1 \\ f(1)| \le 1 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \le 1 + (\frac{1-\alpha}{2})^2, \forall x \in [\alpha, 1]$

$\left.\begin{array}{l} |f(\alpha)| \le 1 \\ |f(-1)| \le 1 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) \le 1 + (\frac{1+\alpha}{2})^2, \forall x \in [-1, \alpha]$

$\rightarrow \forall x \in [-1,1] \Rightarrow f(x) \le 1 + (\frac{1+|\alpha|}{2})^2$

Có đẳng thức khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(\alpha) = -1 \leftrightarrow \begin{cases} b = -1-\alpha \\ c = \alpha - 1 \end{cases} \\ f(1) = -1 \\ x = \dfrac{1+\alpha}{2} \; khi \alpha \le 0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} f(\alpha) = -1 \\ f(-1) = -1 \leftrightarrow \begin{cases} b = 1-\alpha \\ c = -\alpha - 1 \end{cases} \\ x = \dfrac{\alpha-1}{2} \; khi \alpha \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Chú ý

$$\begin{cases} f(\alpha) = -1 \\ f(1) = -1 \\ -1 \le \alpha \le 1 \end{cases} \rightarrow |f(-1)| = |1-b+c| = |2\alpha+1| \le 1 \leftrightarrow -1 \le \alpha \le 0$$

$$\begin{cases} f(\alpha) = -1 \\ f(1) = -1 \\ 0 \le \alpha \le 1 \end{cases} \rightarrow |f(1)| = |1+b+c| = |1-2\alpha| \le 1 \leftrightarrow 0 \le \alpha \le 1$$

Vậy Max|f(x)| bé nhất là $1+(\frac{1+|\alpha|}{2})^2$ đạt $\leftrightarrow$ $+f(x) = x^2+(1-|\alpha|)\frac{|\alpha|}{\alpha}x-|\alpha|-1$

$-1 \le x \le 1$

(Quy ước $\frac{|\alpha|}{\alpha}=1$ khi $\alpha=0$)

Bài toán 23

Cho 3 số α, β, γ thỏa mãn $\gamma < \alpha < \beta$ và $\beta - \gamma \le 2$

Xét các tam thức bậc hai $f(x) = x^2+bx+c$

Thỏa mãn $|f(\alpha)| \le 1$; $|f(\beta)| \le 1$; $|f(\gamma)| \le 1$

Tìm a, b, c để $\underset{[\alpha,\gamma]}{\text{Max}}|f(x)|$ lớn nhất

Giải

Áp dụng bổ đề bài trên ta có

$|f(x)| \le 1+(\frac{\beta-\alpha}{2})^2, \forall x \in [\alpha, \beta]$

$|f(x)| \le 1+(\frac{\alpha-\gamma}{2})^2, \forall x \in [\gamma, \alpha]$

$$\Rightarrow |f(x)| \le 1 + \text{Max}\left\{\left(\frac{\beta-2}{2}\right)^2; \left(\frac{\alpha-8}{2}\right)^2\right\} \qquad \forall x \in [8;\beta]$$

a, $\beta - 2 \ge \alpha - 8$

$$\Rightarrow \forall x \in [8;\beta] \Rightarrow |f(x)| \le 1 + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$$

Có đt $\Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta) = -1$, $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$

Khi đó $f(x) = -1 + (x-\alpha)(x-\beta)$

$\Rightarrow |f(x)| = |-1+(8-\alpha)(8-\beta)| \le 1$

$\leftrightarrow 0 \le (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \le 2$ điều này đúng

Do $\quad 0 < \alpha - \gamma \le \beta - \alpha$

$\Rightarrow 2(\alpha-\lambda) \le \alpha - \gamma + \beta - \alpha = \beta - \gamma \le 2 \Rightarrow 0 < \alpha - \gamma < 1$

$$\Rightarrow (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=(\alpha-\lambda)(\beta-\gamma)\le 1(\beta-\lambda)\le 2$$

b, $\alpha-8\ge\beta-\alpha$

$$\Rightarrow f(x)\le 1+\left(\frac{\alpha-8}{2}\right)^2$$

Có đt $\Leftrightarrow f(\alpha)=f(\gamma)=-1$; $x=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\Rightarrow f(x)=-1+(x-\alpha)(x-\beta)$

Khi đó $|f(\beta)|=|-1+(\beta-\alpha)(\beta-8)|\le 1\Leftrightarrow 0\le(\beta-\alpha)(\beta-8)\le 2$

Đúng do $0<\beta-\alpha\le 1\Rightarrow(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\le\beta-\gamma\le 2$

V ậy Max|f(x)| lớn nhất là

$$1+\text{Max}\left\{\left(\frac{\beta-2}{2}\right)^2;\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)^2\right\}=1+\frac{1}{4}\left(\frac{\beta-\gamma}{2}+\left|\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right|\right)^2$$

Chú ý: $\alpha=-1;\beta=1$ l à bài trước

Bài toán 24 Với mỗi $y\in R$ đặt $f(y)=Max\left|x^2+y^2+xy-3x-3y\right|$ $(0\le x\le 1)$

Tìm giá trị bé nhất của $f(y)$ $(y\in R)$

Bài toán 25: Cho số thực a,b (a<b)

$f(x)=x^2+px+q$

Tìm $p,q\in R$ để $Max\left|f(x)\right|$ bé nhất $[a,b]$

Bài tập: Tìm $p\in R,q\in R$ để $Max\left|f(x)\right|$ bé nhất với $f(x)=px^2+x+q$

$[-1;2]$

$$\underset{[-1;1]}{Max}\left|f(x)\right|\ge Max\left\{\left|f(1)\right|;\left|f(-1)\right|\right\}\ge\frac{1}{2}\left|f(1)-f(-1)\right|=1$$

Với $p=q=0\rightarrow f(x)=x$

Có $\underset{[-1;1]}{\text{Max}}|x|=1$, Vậy p=q=0 $\rightarrow \underset{[-1;1]}{Max}\left|f(x)\right|$ bé nhất là 1

Bài tập: Tìm $p,q\in R$ để $\underset{[-1;1]}{Max}\left|f(x)\right|$ bé nhất với $f(x)=px^2+qx+2$

$$\underset{[-1;1]}{Max}\left|f(x)\ge f(0)=1\right|$$. Với p=q=0 $\rightarrow Max\ f(x)=1$

Bài tóan 26: Cho số thực a. Tìm các tam thức bậc hai.

$f(x) = x^2 + bx + c$ thoả mãn $|f(a)| \le 1, |f(a+1)| \le 1, |f(a+2)| \le 1$

Gi ải

Điều kiên đã cho $\leftrightarrow \begin{cases} |ab+a^2+c| \le 1 \\ |(a+1)b+(a+1)^2+c| \le 1 \\ |(a+2)b+(a+2)^2+c| \le 1 \end{cases}$

$$\leftrightarrow \begin{cases} -a^2-ab-1 \le c \le -a^2-ab+1 \quad (1) \\ -(a+1)^2-(a+1)b-1 \le c \le -(a+1)^2-(a+1)b+1 \quad (2) \\ -(a+2)^2-(a+2)b-1 \le c \le -(a+2)^2-(a+2)b+1 \quad (3) \end{cases}$$

từ (1) và (2) $\Rightarrow -a^2 - ab + 1 \ge -(a+1)^2 - (a+2)b - 1 \Leftrightarrow b \ge 2a - 3$

từ (1) và (3) $\Rightarrow -a^2 - ab + 1 \ge -(a+2)^2 - (a+2)b - 1 \Leftrightarrow b \le -2a - 3$

Với

$b = -2a - 3 \Rightarrow VP(1) = (2a+3)a - a^2 + 1 \ge c \ge VT(1) = (2a+3)(a+1) - (a+1)^2 - 1 = (2a+3)a - a^2 + 1$

$\Rightarrow c = (2a+3)a - a^2 + 1 = a^2 + 3a + 1$

$f(x) = x^2 - (2a+3)x + a^2 + 3a + 1$ (Thoả mãn)

Bài toán 27: Cho số thực $\alpha \ge \sqrt{2}$ xét các số thực k,c,b thoả mãn $f(x) = x^2 + bx + c$

$|f(0)| \le 1; |f(\alpha)| \le 1; |f(k)| \le 1$. Tìm Min k

Gi ải

$$\begin{cases} f(0) = c \\ f(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + c \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} c = f(0) \\ b = \dfrac{f(\alpha) - f(0) - \alpha^2}{\alpha} = \dfrac{z - c - \alpha^2}{\alpha} \end{cases}$$

đặt $z = f(\alpha) \rightarrow -1 \le z, c \le 1$

$\Rightarrow k^2 + bk + c \le 1 \leftrightarrow k^2 + bk + c - 1 \le 0 \rightarrow 2k \le -b + \sqrt{b^2 + 4 - 4c} = \dfrac{-z + c + \alpha^2}{\alpha} + \sqrt{b^2 + 4 - 4c}$

$$= \frac{-z + c + \alpha^2}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{z - c - \alpha^2}{\alpha}\right)^2 + 4 - 4c} = f(z) \Rightarrow f'(z) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{\dfrac{z - c - \alpha^2}{\alpha^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{z - c - c^2}{\alpha}\right)^2 + 4 - 4c}} < 0$$

$$\Rightarrow f(z) \le f(-1) = \frac{1+c+\alpha^2}{\alpha} + \sqrt{(\frac{1+c+\alpha^2}{\alpha}) + 4 - 4c} = \varphi(c)$$

$$\Rightarrow \varphi'(c) = \frac{1}{\alpha} + \frac{\frac{c+1}{\alpha^2} - 1}{\sqrt{(\frac{1+c+\alpha^2}{\alpha}) + 4 - 4c}}$$

chú ý: $\frac{c+1}{\alpha^2} - 1 = \frac{c+1-\alpha^2}{\alpha^2} < 0$ vx |c| ≤

$$1 \Rightarrow \varphi'(c) = \frac{1}{\alpha} + \frac{c+1-\alpha^2}{\alpha^2\sqrt{(\frac{1+c+\alpha^2}{\alpha}) + 4 - 4c}} = \frac{1}{\alpha} + \frac{c+1-\alpha^2}{\alpha(1+c+\alpha^2)} = \frac{2(1+c)}{\alpha(1+c+\alpha^2)} \ge 0$$

$$\to \varphi'(c) \ge 0 \to \varphi(c) \le \varphi(1) = 2(\frac{2+\alpha^2}{\alpha}) \Rightarrow k \le \frac{2+\alpha^2}{\alpha}$$

Mặt khác $f(x) = x^2 - (\frac{\alpha^2+2}{2})x + 1$ cã f(0) = 1 ; f(α) = -1; f($\frac{\alpha^2+1}{\alpha}$) = 1

$$\Rightarrow \text{Max k} = \frac{\alpha^2+2}{\alpha}$$

Hệ quả: Cho hai số thực β, γ $(\gamma - \beta) \ge \sqrt{2}$. Các số thực k,c,b

Thoả mãn $f(x) = x^2 - bx + c; |f(\beta)| \le 1; |f(\gamma)| \le 1; f(k) \le 1$

T ìm giá trị lớn nhất của k

Đặt $t = x - \beta \Rightarrow f(x) = (t+\beta)^2 + b \equiv t^2 + (x+b) + c \equiv t^2 + (x) + \beta^2 + 6 =$

$= t^2 + Bt + C = g(t)$ với $B = 2\beta + b, C = \beta^2 + 6\beta + c$

$| f(\beta) |= g(0) \le 1; | f(\alpha) |=| f(\gamma - \beta) |= f(\alpha) =| g(\alpha) |\le 1, \alpha = \gamma - \beta \ge \sqrt{2}$

V ậy theo trên k_1(max) = $\frac{\alpha^2+2}{\alpha} = \frac{(\gamma-\beta)^2+2}{\gamma-\beta}$ vµ

$| g(\alpha) |\le 1 \leftrightarrow t = k_1 = x - \beta \Leftrightarrow x = k_1 + \beta \to k = k_1 + \beta = \frac{(\gamma-\beta)^2+2}{\gamma-\beta} + \beta$

V ậy k(max)= $\frac{(\gamma-\beta)^2+2}{\gamma-\beta} + \beta = \frac{\gamma^2+2-\gamma\beta}{\gamma-\beta}$

Chú ý: $\begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = \alpha \end{cases}$ ta có kết quả bài trên (thực chất là bài toán tương đương)

Bài toán 28:

Cho số th ực a, α ($a \geq 1, \alpha \geq \sqrt{2}$)

Các số thực k, a, b thoả mãn

$f(x) = ax^2 + bx + c$; $|f(0)| \leq 1$; $|f(\alpha)| \leq 1$; $|f(k)| \leq 1$

T ìm Max k.

đặt $z = f(\alpha) \Rightarrow -1 \leq z \leq 1$

$\Rightarrow f(k) = ak^2 + bk + c \leq 1 \leftrightarrow ak^2 + bk + c - 1 \leq 0$

$$\Rightarrow k \leq \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \leftrightarrow 2ak \leq \frac{-z+a\alpha^2+c}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{z-a\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2 + 4a - 4ac} = g(z)$$

$$\Rightarrow g'(z) = -\frac{1}{2} + \frac{\dfrac{z-a\alpha^2-c}{\alpha^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{z-a\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2 + 4a - 4ac}} < 0$$

Do $z - a\alpha^2 - c \leq 1 - a\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1 = 2.(1-a) \leq 0$

$$\Rightarrow 2ak \leq g(z) \leq g(-1) = \frac{1+a\alpha^2+c}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1+a\alpha^2+c}{\alpha}\right)^2 + 4a - 4ac} = \gamma(c)$$

$$\Rightarrow \gamma'(c) = \frac{1}{\alpha} + \frac{\dfrac{1+a\alpha^2+c}{\alpha^2} - 2a}{\sqrt{\left(\dfrac{1+a\alpha^2+c}{\alpha}\right)^2 + 4a - 4ac}}$$

Do $\dfrac{1+a\alpha^2+c}{\alpha^2} - 2a = \dfrac{1-a\alpha^2+c}{\alpha^2} \leq \dfrac{1+1-a\left(\sqrt{2}\right)^2}{\alpha^2} = \dfrac{2.(1-a)}{\alpha^2} \leq 0$

$$\text{Vì } |c| \leq 1 \Rightarrow \varphi'(c) \geq \frac{1}{\alpha} + \frac{\dfrac{1+a\alpha^2+c}{\alpha^2} - 2a}{\sqrt{\left(\dfrac{1+a\alpha^2+c}{\alpha}\right)^2 + 0}} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1+c-a\alpha^2}{\alpha(1+a\alpha^2+c)} = \frac{2(c+1)}{\alpha(1+a\alpha^2+c)} \geq 0$$

$\Rightarrow \gamma(c)$ tăng trên [-1;1]

$$\Rightarrow \gamma(c) \leq \gamma(1) = 2\left(\frac{2+a\alpha^2}{\alpha}\right) \rightarrow k \leq \frac{2+a\alpha^2}{\alpha}$$

Mặt khác f(x) = ax^2 - $\frac{2+a\alpha^2}{\alpha}x+1$

Có f(0) = f ($\frac{a\alpha^2+2}{a\alpha}$) =1, f(α) = -1

Vậy Max k = $\frac{2+a\alpha^2}{a\alpha}$

Bài toán 29

Cho số thực a ≠ 0, α > 0. Các số thực k, a, b thay đổi thoả mãn f(x) = ax^2 + bx +c;

$|f(0)|\le 1;|f(\alpha)|\le;|f(k)|\le 1$. Tìm GTLN của k.

Gi ải: Ta xét a > 0

$$f(0)=e;f(x)=z=a\alpha^2+b\alpha+c\to b=\frac{-a\alpha^2+z-c}{\alpha}\to -1\le c;z\le 1$$

$$f(k)=ak^2+bk+c\le 1\to k\le\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ta chứng minh

$$g(z)\le g(-1)=1+a\alpha^2+c+\sqrt{\left(1+a\alpha^2+c\right)^2+4a\alpha^2(1-c)}=\gamma(c)$$

$$\leftrightarrow (1+z)+\frac{(1+z)(1+2a\alpha^2+2c-z)}{\sqrt{(z-a\alpha^2-c)^2+4a\alpha^2(1-c)}+\sqrt{\left(1+a\alpha^2+c\right)^2+4a\alpha^2(1-c)}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(z-a\alpha^2-c)^2+4a\alpha^2(1-c)}+\sqrt{\left(1+a\alpha^2+c\right)^2+4a\alpha^2(1-c)}\ge z-1-2a\alpha^2-2c^{(*)}$$

Thật vậy do $|c|\le 1$ nên VT $(*)\ge\left|z-a\alpha^2-c\right|+\left|1+a\alpha^2+c\right|\ge z-a\alpha^2-c+(-1-a\alpha^2-c)=$ VP

(*)(Đpcm)

Ta lại chứng minh $\gamma(c)\le\gamma(1)=2+a\alpha^2+\sqrt{\left(2+a\alpha^2\right)^2}=4+2+a\alpha^2$

Vx $\Leftrightarrow\sqrt{\left(1+a\alpha^2+c\right)^2+4a\alpha^2(1-c)}\le 3+a\alpha^2-c$

$$\leftrightarrow c^2+2\left(1+a\alpha^2\right)c+\left(1+a\alpha^2\right)^2+4a\alpha^2-4a\alpha^2c\le c^2-2\left(a\alpha^2+3\right)c+\left(3+a\alpha^2\right)$$

$\leftrightarrow 8c\le 8\leftrightarrow c\le 1$ (đúng)

V ậy $2a\alpha k\le 4+2a\alpha^2\leftrightarrow k\le\frac{2+a\alpha^2}{a\alpha}$

Mặt khác $f(x)=ax^2-\frac{2+a\alpha^2}{a\alpha}x+1$ có $f(0)=f\left(\frac{2+a\alpha^2}{a\alpha}\right)=1;f(\alpha)=-1$

Vậy Max k = $\frac{2+a\alpha^2}{a\alpha}$

Nên a<0 $\Rightarrow$ $-f(x)=-a(-x)^2+b(-x)-c=f_1(x)$ s. Theo cách làm trên thì $K_{max}=\dfrac{2-a\alpha^2}{-a\alpha}$

Tóm lại $K_{(max)}=\dfrac{2+|a|\alpha^2}{|a|\alpha}$;

Bài toán 30 : Cho số thực $a\neq 0$, β, γ; $\beta<\gamma$. Các số thực b, c, k thỏa mãn $f(x)=ax^2+bx+c$, $|f(\beta)|\leq 1$, $|f(\gamma)|\leq 1$, $|f(k)|\leq 1$. Tìm max k.

Giải: Ta đưa bài toán này về bài toán trên bằng cách:

Đặt $t=x-\beta \rightarrow f(x)=a(t+\beta)^2+b(t+\beta)+c$

$$=at^2+(2a\beta+b)t+a\beta^2+b\beta+c$$

$$=at^2+Bt+C=g(t)$$

với $B=2a\beta+b$; $C=a\beta^2+b\beta+c$

Suy ra: $|g(0)|=|f(\beta)|\leq 1$; $|g(\gamma-\beta)|=|f(\gamma)|\leq 1$

Theo bài toán trên $|g(k_1)|\leq 1$ .Suy ra: $k_1\leq\dfrac{2+|a|(\gamma-\beta)^2}{|a|(\gamma-\beta)}\leftrightarrow k_1=k-\beta\leq\dfrac{2+|a|(\gamma-\beta)^2}{|a|(\gamma-\beta)}$

$$\leftrightarrow k\leq\beta+\frac{2+|a|(\gamma-\beta)^2}{|a|(\gamma-\beta)}\rightarrow k_{(max)}=\beta+\frac{2+|a|(\gamma-\beta)^2}{|a|(\gamma-\beta)}$$

Chú ý:

1) Thực chất bài toán trên và hệ quả này là tương đương
2) Cho số thực $a\neq 0$, $p>0$, β, γ; $\beta<\gamma$. Các số thực b, c, k thỏa mãn $f(x)=ax^2+bx+c$, $|f(\beta)|\leq p$, $|f(\gamma)|\leq p$, $|f(k)|\leq p$. Tìm max k.

Giải:

$$\frac{f(x)}{p}=\frac{a}{p}x^2+\frac{b}{p}x+c=g(x)\rightarrow |g(\beta)|\leq 1;\ |g(\gamma)|\leq 1;\ |g(k)|\leq 1$$

Nên theo hệ quả suy ra: $k\leq\beta+\dfrac{2+|\frac{a}{p}|(\gamma-\beta)^2}{|\frac{a}{p}|(\gamma-\beta)}$; Vậy $k_{(max)}=\beta+\dfrac{2+|\frac{a}{p}|(\gamma-\beta)^2}{|\frac{a}{p}|(\gamma-\beta)}$

Bài toán 31 : Cho số thực $\alpha\geq\sqrt{2}$; các số thực k,b,c thoả mãn:

$f(x)=x^2+bx+c,\ |f(0)|\leq 1,\ |f(\alpha)|\leq 1,\ |f(k)|\leq 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của k .

Giải:

Cách 1: $f(0)=c\Rightarrow |c|\leq 1$

$$f(\alpha)=\alpha^2+b\alpha+c\Rightarrow b=\frac{f(\alpha)-\alpha^2-c}{\alpha}$$

Đặt $f(\alpha)=z\Rightarrow b=\dfrac{z-\alpha^2-c}{\alpha}$ $(-1\leq z,c\leq 1)$

$$\Rightarrow f(k)=k^2+bk+c\le 1 \Leftrightarrow k^2+bk+c-1\le 0 \Rightarrow k\ge \frac{-b-\sqrt{b^2+4-4c}}{2}$$

$$\Rightarrow 2k\ge \frac{-z+\alpha^2+c}{\alpha}-\sqrt{\left(\frac{z-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2+4-4c}=g(z)$$

$$\Rightarrow g'(z)=\frac{-1}{\alpha}-\frac{\dfrac{z-\alpha^2-c}{\alpha^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{z-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2+4-4c}}$$

Do $z^2-\alpha^2-c\le 1-\alpha^2+1<0$ và $4-4c\ge 0 \Rightarrow g'(z)\le \frac{-1}{\alpha}+\dfrac{z-\alpha^2-c}{\sqrt{\left(\dfrac{z-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2+0}}=0$

$\Rightarrow g(z)$ giảm $\Rightarrow g(z)\ge g(1)=\dfrac{-1+\alpha^2+c}{\alpha}-\sqrt{\left(\dfrac{1-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2+4-4c}=\varphi(c)$

$$\varphi'(c)=\frac{1}{\alpha}+\frac{\dfrac{1-\alpha^2-c}{\alpha^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{1-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2+4-4c}}\ge \frac{1}{\alpha}+\frac{\dfrac{1-\alpha^2-c}{\alpha^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{1-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2}}=0$$

$\Rightarrow \varphi(c)$ tăng $\Rightarrow \varphi(c)\ge\varphi(-1)=\dfrac{\alpha^2-2}{\alpha}-\sqrt{8+\left(\dfrac{\alpha^2-2}{\alpha}\right)^2}\Rightarrow k\ge \dfrac{\alpha^2-2}{2\alpha}-\dfrac{1}{2}\sqrt{8+\left(\dfrac{\alpha^2-2}{\alpha}\right)^2}=\dfrac{-2}{\alpha}$

Mặt khác $f(x)=x^2+\dfrac{2-\alpha^2}{\alpha}x-1$ có $f(0)=-1, f(\alpha)=f\left(\dfrac{-2}{\alpha}\right)=1\Rightarrow \min k=\dfrac{-2}{\alpha}$

Cách 2 *(không sử dụng đạo hàm và chỉ cần $\alpha>0$)* $2k\ge g(z)$ ta chứng minh

$$g(z)=\frac{-z+\alpha^2+c}{\alpha}-\sqrt{\left(\frac{z-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2+4-4c}\ge g(1)=\frac{-1+\alpha^2+c}{\alpha}-\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2+4-4c}=\varphi(c)$$

$\ge 2\alpha^2+2c-1-z(*)$

$$\Leftrightarrow \frac{1-z}{\alpha}+\frac{\dfrac{1}{\alpha^2}(1-z)(1+z-2\alpha^2-2c)}{\sqrt{\left(\dfrac{1-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2+4-4c}+\sqrt{\left(\dfrac{z-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2+4-4c}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha\left[\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2+4-4c}+\sqrt{\left(\frac{z-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2+4-4c}\right]$$

Thật vậy $VT(*) \geq \alpha\left[\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{z-\alpha^2-c}{\alpha}\right)^2}\right]=\left|1-\alpha^2-c\right|+\left|z-\alpha^2-c\right|$

$$\geq\left(-1+\alpha^2+c\right)+\left(-z+\alpha^2+c\right)=2\alpha^2+2c-1-z=VP(*)$$

Ta lại chứng minh $g(1)=\varphi(c)\geq\varphi(-1)=\frac{\alpha^2-2}{\alpha}-\sqrt{\left(\frac{2-\alpha^2}{\alpha}\right)^2+8}=\frac{-4}{\alpha}$

$$\Leftrightarrow \frac{3+c+\alpha^2}{\alpha}\geq\frac{1}{\alpha}\sqrt{\left(\alpha^2-1+c\right)^2+\left(4-4c\right)\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(3+c+\alpha^2\right)^2\geq\left(\alpha^2-1+c\right)^2+\left(4-4c\right)\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow c\geq -1 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy $\min k=\frac{-2}{\alpha}$

<u>Hệ quả:</u>

Cho số thực $\gamma<\beta$, các số thực b,c,k thoả mãn

$f(x)=x^2+bx+c,\ \left|f(\gamma)\right|\leq 1,\ \left|f(\beta)\right|\leq 1,\ \left|f(k)\right|\leq 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của k .

<u>Giải:</u>

Đặt $t=x-\gamma \Leftrightarrow x=t+\gamma$

$f(x)=(t+\gamma)^2+b(t+\gamma)+c=t^2+(2\gamma+b)t+\gamma^2+b\gamma+c$

$=t^2+Bt+C=g(t)$ (với $B=2\gamma+b, C=\gamma^2+b\gamma+c$)

$\Rightarrow \left|-f(\gamma)\right|=\left|g(0)\right|\leq 1; \left|f(\beta)\right|=\left|g(\beta-\gamma)\right|\leq 1$ (Đặt $\alpha=\beta-\gamma>0$)

Theo bài trên $\left|g(k_1)\right|\leq 1\Rightarrow k_1(\min)=\frac{-2}{\alpha}$

$$\Leftrightarrow k_1=k-\gamma=\frac{-2}{\beta-\gamma}\Leftrightarrow k=\gamma-\frac{2}{\beta-\gamma}$$

$$\Rightarrow k(\min)=\gamma-\frac{2}{\beta-\gamma}$$

Bài toán 32: Cho số thực a, α (a>0,α>0) các số thực b, c, k thỏa mãn

$$\left|f(0)\right|\leq 1, \left|f(\alpha)\right|\leq 1, \left|f(k)\right|\leq 1$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của k ($f(x)=ax^2+bx+c$)

Hệ quả : Cho số thực a, γ,β (a> 0, $\gamma < \beta$)

Các số thực b, c ,k thỏa mãn :f(x)= ax^2+bx+c; $|f(\gamma)| \le 1$; $|f(\beta)| \le 1$

Tìm min k

Bài toán 33

x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn x+y+z=1.Tìm max , min : $A=x^2+y^2+z^2+4xyz$

Tổng quát : cho số thực k >0. Các số thực x,y,z không âm thỏa mãn x+y+z=1.

Tìm max, min $A=x^2+y^2+z^2+kxyz$

Bài toán 35: Cho các số dương a, b, c (a>1; b<c) và số tự nhiên $x_i \in [b;c]$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của : $A=\left(\sum_1^n a^{x_i}\right)\left(\sum_1^n a^{-x_i}\right)$

Bài toán 36: Cho số thực k ($3\le k \le 4$).Các số thực x,y thỏa mãn $0\le x,y \le 2$; $1\le x+y \le k$

Tìm Max,Min $A=x^2+y^2+xy-3x-3y$

Bài toán 37 :Các số thực: b, c, k thỏa mãn: $f(x)=x^2+bx+c$;

$|f(-1)|\le 1$; $|f(0)|\le 1$; $|f(1)|\le 1$; $|f(k)|\le 1$;

Tìm: max k; min k

Bài toán 38: Cho số thực: α, các số thực: b, c, k

Thỏa mãn: $f(x)=x^2+bx+c; |f(\alpha)|\le 1; |f(\alpha+1)|\le 1; |f(\alpha+2)|\le 1; |f(k)|\le 1$

Tìm max k; min k

Bài toán 39: Cho số thực a, α ($0<a\le 1$; $-1<\alpha<1$)

Xét các tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $|f(k)|\le 1$ với $k=\pm 1, k=\alpha$

Tìm b, c để $\max\limits_{[-1;1]} |f(x)|$ lớn nhất

Bài toán 40: Cho $a\ge 1$.Xétcác tam thứcbậchai $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏamãn

$|f(1)|\le 1, |f(0)|\le 1, |f(-1)|\le 1$

a,Chứng minh rằng :$1\le a\le 2$

b,Tìm b,c để $\max\limits_{[-1;1]} |f(x)|$ lớn nhất

Bài toán 42: $f(x,y) = x^2y + xy^2 - ax - by$.Tìm a, b để $\max\limits_{x,y \in [0,1]} |f(x, y)|$ bé nhất.

Giải:

Bài này có thể yêu cầu cao hơn các bài trên là phải tìm giá trị bé nhất của hàm số $|f(x,y)|$

$$\max_{x,y\in[0,1]} |f(x,y)| \ge Max\,(|a|; |b|; |2-a-b|) \ge \frac{1}{3}|a+b+2-a-b| = \frac{2}{3}$$

$$\text{Với } a=b=\frac{2}{3} \Rightarrow |f(x,y)| = |(x+y)(xy-\frac{2}{3})|$$

a) Khi $xy \geq \frac{2}{3}$ do $x,y \in [0,1]$ nên $|(x+y)(xy-\frac{2}{3})| = (x+y)(xy-\frac{2}{3}) \leq$

$$\leq (1+1)(1-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$$

b) Khi $xy < \frac{2}{3} \Rightarrow (1-x)(1-y) \geq 0 \Leftrightarrow x+y \leq 1+xy$

$\Rightarrow 0 \geq (x+y)(xy-\frac{2}{3}) \geq (1+xy)(xy-\frac{2}{3})$

$\Rightarrow |(x+y)(xy-\frac{2}{3})| \leq |(1+xy)(xy-\frac{2}{3})| = (1+xy)(\frac{2}{3}-xy) =$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}xy - (xy)^2 \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \underset{x,y \in [0,1]}{Max} |f(x,y)|$ bé nhất là $\frac{2}{3}$.

Trên đây là một số kết quả mà tôi đã đúc rút và giảng dạy cho học sinh xin trao đổi cùng các bạn đồng nghiệp.

Vài nhận xét về sách giáo khoa toán của nước Pháp

Vũ Kim Thuỷ, TC Toán tuổi thơ

1. Về cơ sở lí luận

Pháp là nước phát triển và có nền giáo dục tiên tiến. Sách giáo khoa Pháp có chất lượng cao dựa trên truyền thống, đúc kết được tinh hoa của nhiều thế hệ đi trước và không ngừng cập nhật. Sách Toán Pháp có chất lượng cao.

Đã có một thời nhóm Buốcbaki đưa các tư tưởng của toán học hiện đại vào sách ngay từ tiểu học. Thực tế đã chứng minh là truyền thụ kiến thức cần theo con đường của nhận thức và ngày nay sách toán Pháp lại quay lại cách tiếp cận truyền thống là đi từ cụ thể đến trừu tượng, từ dễ đến khó.

Các nhà giáo dục và các tác giả sách đã quan niệm Toán là môn học cơ bản, môn công cụ để giúp phát triển tư duy và tiếp thu tốt các môn Khoa học tự nhiên, các môn học xã hội và ngôn ngữ.

2. Ưu điểm của sách toán Pháp

Điều nổi bật của sách giáo khoa toán Pháp là phong phú thông tin về mọi lĩnh vực. Có thể thấy trong đó các bài tập về môi trường, về nước, không khí, tiêu chuẩn về an toàn trong lao động và cuộc sống, các hiểu biết về Trái đất, thiên văn, số liệu về du lịch, chiều cao, cân nặng của trẻ em các độ tuổi, về sức khỏe, biển báo giao thông, đến cả các công thức làm bánh... Sách giáo khoa toán vì thế gần gũi với cuộc sống, không khô khan. Nó khác hẳn với các cuốn sách chỉ toàn x, y, z,... và các công thức. Một ví dụ đơn giản là khi muốn học sinh làm quen với khái niệm trực tâm thì sách cũng đưa ra dưới dạng tìm vị trí quả bóng cách đều ba cầu thủ đứng ở 3 đỉnh hình tam giác. Từ lớp 1 học sinh đã làm quen với các bài về thời gian như thứ, ngày (trang 110), giờ (trang 125 đến 127), chữ số La mã (trang 112) (xem bản dịch tiếng Việt của NXBGD Việt Nam).

Sách Toán Pháp khá cập nhật khi có cả các số liệu về người dùng internet, số người mua hàng qua mạng... Cách thể hiện sách sinh động, bắt mắt và dễ hiểu. Chẳng hạn sách lớp 3 có bài cho học sinh vẽ chiếc ôtô từ các hình vuông, chữ nhật, một phần hình tròn...

Sách toán Pháp coi trọng Hình học. Điều này giống với sách toán của Liên xô trước đây và Nga ngày nay. Trước đây sách toán Việt Nam cũng có thế mạnh này. Ngay từ lớp 1 của Pháp học sinh đã được làm quen với các hình, nhiều bài tập về các hình để nhận biết, đo vẽ, làm quen với khái niệm đơn vị đo (các trang 80 đến 89). Các trang Tạp chí toán học chắc chắn đem đến cho học sinh sự thú vị khi đọc chúng.

3.Về chương trình

Các ví dụ trên cho thấy khung chương trình của Pháp thực hiện như của các nước Anh, Úc, Singapore... tức là đồng tâm. Các kiến thức thường đưa vào sớm hơn Việt Nam. Ví dụ lớp 1 đã học các số đến 100 (Việt Nam học đến 10), có hình vuông, tam giác, chữ nhật, làm quen với thời gian (Việt Nam chưa dạy). Lớp 3 học sinh đã làm quen với số chính phương (số hình vuông), số tam giác... Các lớp sau các khái niệm lại được nhắc lại với mức độ cao hơn. Điều này tốt với các học sinh vùng sâu vùng xa khó khăn không theo học được hết phổ thông. Với các học sinh học đủ chương trình thì nó khắc sâu khái niệm và học sinh nhớ lâu hơn.

4. Cách trình bày

Nói chung sách toán Pháp tương thích với sách toán các nước Anh, Mỹ, Úc, Singapore...

Sách trình bày đẹp. Bố trí rõ các môđun kiến thức, các công việc thầy trò cần làm. Lợi dụng mọi cơ hội để truyền thụ kiến thức như số trang viết cả bằng số và bằng chữ tường minh.

5. Liên hệ với sách giáo khoa cho Việt Nam

Nên cho học sinh làm quen với các hình hình học sớm để học sinh hứng thú với môn học. Vả lại các hình hình học vốn xuất hiện nhiều trong cuộc sống và là một trong hai đối tượng đầu tiên loài người nghiên cứu đó là các con số và các hình.

Coi trọng kiến thức về thống kê, xác suất vì tính ứng dụng cao trong thực tiễn. Học sinh sau này làm quản lí xã hội, quản lí đô thị, nghiên cứu vật lí, hóa học, sinh vật, thiên văn... đều phải sử dụng thành thạo các khái niệm trung bình, trung vị, đa tần (mốt)...

Điều chỉnh hệ thống kí hiệu cho tương thích với thế giới và dễ ứng dụng công nghệ như: số thập phân viết dấu chấm "." thay cho dấu phẩy "," (điều này đã áp dụng từ lâu trong hệ thống kế toán tài chính của Việt Nam nhưng trong nhà trường chúng ta vẫn dạy ngược lại), đưa vào cách viết tan, sec, cosec (csc). Dạy học sinh các khái niệm về tiền tệ, lỗ lãi, tiền giảm giá, hoa hồng (Singapore dạy các khái niệm này từ các lớp 6,7). Cần coi trọng hơn kết quả tính toán như các khái niệm chữ số có nghĩa, dạng tiêu chuẩn và các phương pháp tính nhanh, tính nhẩm, ước lượng. Học sinh đến lớp cuối cấp THCS mới nên sử dụng máy tính bỏ túi trong tính toán. Khi dạy học sinh thi lấy các học bổng đi du học nước ngoài gần đây chúng tôi thấy học sinh Việt Nam tính toán yếu, không biết cách ghi kết quả theo những yêu cầu khắt khe của đề bài, không vững về hình không gian, các bài tập về đồ thị, thiếu kiến thức về tiền tệ, các bài tập gắn với cuộc sống...

Sách Việt Nam cần giảm nhẹ các phần giới hạn, tích phân, nguyên hàm, bất đẳng thức khó để có thời lượng cho các vấn đề thiết thực nêu trên.

Muốn thay đổi cách học, cách dạy thì phải thay đổi từ đề thi nữa. Sách THCS Việt Nam có phần thống kê nhưng thi hết cấp THCS trước đây và thi vào THPT hiện nay không có các bài này nên không trường nào dạy cẩn thận phần này. Tạp chí Toán tuổi thơ trong khả năng của mình đã có các bổ trợ cần thiết cho học sinh về các mảng kiến thức như đã nói trên.

Dạy học chủ đề Giải tích cấp THPT theo quan điểm tích hợp

Đậu Xuân Lương, Trần Đức Chiển, Trường CĐSP Quảng Ninh

1. Cần thiết và có thể dạy học Toán theo quan điểm tích hợp

1.1. Tóm tắt về dạy học tích hợp (DHTH)

Nhiều nhà KHGD đã xác định những vấn đề chính về DHTH; chẳng hạn:

- *Dạy học tích hợp có nghĩa là những kiến thức, kĩ năng học được ở môn học này, phần này của môn học được sử dụng như những công cụ để nghiên cứu học tập trong môn học khác, trong các phần khác của cùng một môn học.* (Phạm Văn Lập, *Bài giảng phương pháp dạy học sinh học ở trường THPT.* Đại học Quốc gia Hà Nội, 2007).
- *Tích hợp là cách tư duy trong đó các mối liên kết được tìm kiếm, do vậy, tích hợp làm cho việc học chân chính xảy ra* (Clark, 2002).
- *DHTH là một cách trình bày các khái niệm và nguyên lí khoa học cho phép diễn đạt sự thống nhất cơ bản của tư tưởng khoa học, tránh nhấn quá mạnh hoặc quá sớm sự sai khác giữa các lĩnh vực KH khác nhau* (UNESCO, 1972).

Nghiên cứu về DHTH; Drake and Burns (2004) đã đề xuất các định hướng giáo dục tích hợp bao gồm:

1) Tích hợp đa môn (Multidisciplinary Integration);

2) Tích hợp liên môn: (Interdisciplinary Integration);

3) Tích hợp xuyên môn (Transdisciplinary Integration).

Những ví dụ minh họa mà chúng tôi sẽ trình bày ở mục **2.** chủ yếu dựa theo những định hướng này và được thể hiện bằng các hình thức: *Bài mục riêng; lồng ghép, liên hệ.*

1.2. Cần thiết dạy học Toán theo quan điểm tích hợp

Nhiều nhà khoa học sư phạm khẳng định sự cần thiết của DTTH; chẳng hạn:

- GS Đinh Quang Báo cho rằng: "*Tích hợp là nguyên lý không bàn cãi bởi tri thức của chúng ta tất cả đều là tích hợp, không có ai chỉ tư duy bằng môn này hoặc môn kia, bởi khi giải quyết một vấn đề thực tiễn phải sử dụng tri thức của nhiều môn học khác nhau. Con người cần cái đó thì giáo dục phải giáo dục cái đó là đương nhiên*".
- GS. Trần Bá Hoành khẳng định: "*Ngày nay không còn là lúc đặt vấn đề thảo luận dạy học tích hợp các khoa học là cần hay không cần, nên hay không nên. Câu trả lời là khẳng định cần phải tích hợp các môn học*".

Đồng tình với quan điểm trên, chúng tôi xác định: DHTH sẽ giúp (và cũng đòi hỏi) học sinh (HS) học tập thông minh và vận dụng kiến thức, kĩ năng, phương pháp một cách toàn diện, hài hòa, sáng tạo và hợp lí nhằm giải quyết những tình huống khác nhau và mới mẻ trên giảng đường cũng như trong cuộc sống. Vì vậy, dạy học nói chung và dạy học Toán nói riêng rất cần và có thể thực hiện theo định hướng DHTH.

1.3. Thuận lợi và khó khăn khi dạy học chủ đề Giải tích theo quan điểm tích hợp

a) Thuận lợi

- Nhiều nội dung kiến thức HS đã được tiếp cận từ khi học ở Trung học cơ sở (yếu tố dãy số, hàm số, yếu tố giới hạn,...).
- Các bộ phận của hệ thống kiến thức có mối liên hệ chặt chẽ với nhau.
- Không đòi hỏi đặc biệt nào về phương tiện, thiết bị dạy học.

b) Khó khăn

- Cần đầu tư nhiều công sức, trí tuệ và thời gian cho chuẩn bị và soạn bài.
- Giảng viên cần tự học, tự nghiên cứu thường xuyên mới có thể làm chủ được các hoạt động của thày và trò trong tiết dạy.

2. Các thí dụ

Thí dụ 1: (Liên hệ) *Dãy số - Dãy phương trình.*

1) Mục tiêu: HS có kĩ năng tìm giới hạn dãy số (khử dạng vô định 1^∞), liên hệ được với kiến thức về phương trình, hàm số, đạo hàm.

2) Có thể tóm tắt tiến trình dạy học như sau:

- Giáo viên (GV) có thể nêu vấn đề về sự *vô nghiệm* của phương trình $x = x + 1$ và sự *có nghiệm* của các phương trình $x^2 = x + 1$; $x^3 = x + 1$ và *dẫn tới* bài toán:

Với mỗi số tự nhiên n > 1; chứng minh rằng phương trình: $x^n = x + 1$ *có nghiệm dương duy nhất* x_n. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n - 1)$.

- GV hướng dẫn HS chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất, có thể là:

Xét hàm liên tục, khả vi $f_n(x) = x^n - x - 1$ có $f(1)f(2) < 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm $x_n \in (1;2)$.

Lại có $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1 > 0, \forall x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$ nên nghiêm x_n ở trên là duy nhất.

- HS chủ động tìm được $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, có thể là:

$$1 < x_n = \sqrt[n]{x_n + 1} = \sqrt[n]{(x_n+1).1\ldots1} < \frac{x_n + n}{n} < \frac{n+2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

- GV hướng dẫn HS tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n - 1)$, có thể tóm tắt cách giải quyết vấn đề như sau:

$$n\ln x_n = \ln(x_n + 1)$$

$$\Rightarrow n(x_n - 1) = \frac{(x_n - 1)\ln(x_n + 1)}{\ln x_n} = \frac{\ln(x_n + 1)}{\ln x_n^{\frac{1}{x_n - 1}}} = \frac{\ln(x_n + 1)}{\ln(1 + x_n - 1)^{\frac{1}{x_n - 1}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\ln 2}{\ln e} = \ln 2$$

- GV gợi ý HS khai thác vấn đề, chẳng hạn là:

Với mỗi số tự nhiên n > 2, chứng minh rằng phương trình: $x^n - x^2 - x - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất $x_n \in (1;2)$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n - 1)$

Với mỗi số tự nhiên n > 3, chứng minh rằng phương trình: $x^n - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất $x_n \in (1;3)$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n - 1)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n(x_n^2 - 1)$.

Thí dụ 2: (Lồng ghép) *Định lý Rolle – Phương trình.*

1) Mục tiêu: HS có kĩ năng vận dụng định lý *Rolle*, phối hợp với kĩ năng tính đạo hàm, biến đổi biểu thức toán học.

2) Có thể tóm tắt tiến trình dạy học như sau:

- HS tự lực nhắc lại định lý *Rolle*: Nếu hàm số f(x) liên tục trên [a,b]; khả vi trong (a,b); f(a) = f(b) thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

- GV giao nhiệm vụ cho các nhóm học tập:

Nhóm 1: Cho hàm số f(x) liên tục trên [a;b], khả vi trong (a;b) và f(a) = f(b) = 0. Chứng minh rằng: $\forall m \in R$ thì phương trình $mf(x) + f'(x) = 0$ có nghiệm trong (a,b).

Nhóm 2: Hàm số f(x) và g(x) liên tục trên [a;b], khả vi trong (a;b) và f(a) = f(b) = 0. Chứng minh rằng phương trình: $g'(x)f(x) + f'(x) = 0$ có nghiệm trong (a,b).

Nhóm 3: Cho f(x) là hàm số liên tục trên [0;1], khả vi trong (0;1) và f(1) = 0. Chứng minh rằng phương trình $2013.f(c) + cf'(c) = 0$ có nghiệm trong (0;1).

Nhóm 4: Các số thực a_i thỏa mãn: $\dfrac{a_0}{1} + \dfrac{2a_1}{2} + \dfrac{2^2a_2}{3} + ... + \dfrac{2^{n-1}a_{n-1}}{n} + \dfrac{2^n a_n}{n+1} = 0.$

Chứng minh rằng: $f(x) = a_n\ln^n x + a_{n-1}\ln^{n-1}x + ... + a_1\ln x + a_0$ có nghiệm $x \in (1;e^2)$

- Các nhóm HS tìm cách giải quyết vấn đề (có sự giúp đỡ của GV)

- GV hướng dẫn HS trình bày cách giải quyết vấn đề, có thể là:

Nhóm 1: xét hàm $F(x) = e^{mx}f(x)$.

Nhóm 2: xét hàm $F(x) = e^{g(x)}f(x)$.

Nhóm 3: xét hàm $F(x) = x^{2013}f(x)$

Nhóm 4: xét hàm $F(x) = = \dfrac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \dfrac{a_1}{n}x^n + ... + a_n x$

- GV kết luận.

Thí dụ 3: (Mục riêng) *Lý thuyết - Thực hành.*

1) Mục tiêu: HS hiểu rõ hơn về liên tục và hiểu thêm về *liên tục đều*, có kĩ năng chỉ ra một hàm số *liên tục* trong một khoảng nhưng không *liên tục đều* trong khoảng đó.

2) Có thể tóm tắt tiến trình dạy học như sau:

- GV trình bày khái niệm hàm số liên tục đều

Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục đều trong tập $X \subset$ tập xác định nếu: $\forall \varepsilon > 0$ đều $\exists \delta > 0$ sao cho khi $\forall x, y \in X$ mà $|x - y| < \delta$ thì $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

- GV gợi vấn đề: Hàm số f(x) liên tục đều trong X thì có liên tục trong X hay không?

- HS tự lực tìm ra câu trả lời là có, vì chỉ cần tạm cố định $y = x_0$ trong định nghĩa liên tục đều.
- GV giúp HS phát hiện vấn đề: Hàm số f(x) liên đều trong X thì có liên tục đều trong X hay không?
- HS thảo luận tìm cách nêu điều kiện để hàm f(x) không liên tục đều trong X: Hàm số $y = f(x)$ không liên tục đều trong tập $X \subset$ tập xác định nếu: $\exists\ \varepsilon > 0$ mà $\forall \delta > 0$ vẫn $\exists$ x, $y \in X$ mà $|x - y| < \delta$ nhưng $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.
- GV hướng dẫn HS thực hành giải toán. Có thể là chứng minh rằng:

a) $f(x) = \sin x^2$ liên tục nhưng không liên tục đều trong khoảng $(0,\infty)$.

b) $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ liên tục nhưng không liên tục đều trong khoảng $(0,\infty)$.

c) $f(x) = \ln x$ liên tục nhưng không liên tục đều trong khoảng $(0;1)$.

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục nhưng không liên tục đều trong khoảng $(0;1)$.

e) $f(x) = x\sin x$ liên tục nhưng không liên tục đều trong khoảng $(0,\infty)$.

- GV có thể hướng dẫn HS phát biểu và chứng minh định lý Cantor (Một hàm số liên tục trên một đoạn thì liên tục đều trên đoạn đó).

3. Kết luận

Tư tưởng, thói quen và kĩ năng tích hợp của mỗi người cần được tập luyện, rèn rũa từ khi ngồi trên ghế nhà trường. Trong gần hai thập kỉ qua; chương trình – sách giáo khoa Toán của nước ta đã có nhiều đổi mới theo hướng hỗ trợ DHTH (tuy vẫn chưa được như mong muốn); thiết nghĩ, người thầy giáo đứng lớp (ở tất cả các cấp học) rất cần và có thể khai thác chúng giúp cho DHTH dần dần có kết quả tốt.

Tài liệu tham khảo

1. Trần Bá Hoành, *Xây dựng chương trình giáo dục cho mọi người trong cộng đồng và việc đổi mới đào tạo giáo viên khoa học*, Thông tin Khoa học giáo dục số 36 (1993).

2. Nguyễn Văn Mậu – Bùi Công Huấn – Đặng Hùng Thắng – Trần Nam Dũng – Đặng Huy Ruận, *Một số chuyên đề toán học chọn lọc bồi dưỡng học sinh giỏi*, Hà Nội – 2004.

3. Xavier Roegiers, *Khoa sư phạm tích hợp hay làm thế nào để phát triển các năng lực tích hợp ở nhà trường* (Nguyên bản tiếng Pháp - người dịch: Đào Trọng Quang - Nguyễn Ngọc Nhị), Nxb Giáo dục - 1996.

MỤC LỤC